应用光学

谭峭峰
tanqf@mail.tsinghua.edu.cn
清华大学 精密仪器系 光电工程研究所

第二章
近轴光学

2.1 近轴范围和近轴光线

共轴光学系统

球面、非球面、平面

折射、反射

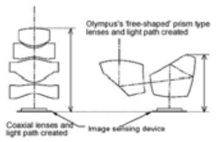
$r \longrightarrow \infty$，球面 $\longrightarrow$ 平面

$$z = \frac{ch^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon(ch)^2}} + a_4h^4 + a_6h^6 + a_8h^8 + \cdots$$

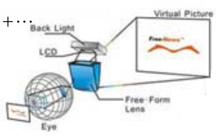
$h \longrightarrow 0$，非球面 $\longrightarrow$ 球面

$n' = -n$，折射 $\longrightarrow$ 反射

球面折射行为具有代表性



Olympus手机摄像头透镜组



富瑞丰公司头盔式显示器

子午面

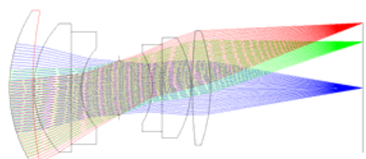


图2-1 一个普通照相镜头的结构

Surf:Type		Comment	Radius		Thickness	Glass	Semi-Diameter
OBJ	Standard		Infinity		Infinity		Infinity
1	Standard		54.153246	V	8.746658	SK2	29.225298
2	Standard		152.521921	V	0.500000		28.140954
3	Standard		35.950624	V	14.000000	SK16	24.295812
4	Standard		Infinity		3.776966	F5	21.297191
5	Standard		22.269925	V	14.253059		14.919353
STO	Standard		Infinity		12.428129		10.228835
7	Standard		-25.685033	V	3.776966	F5	13.187758
8	Standard		Infinity		10.833929	SK16	16.468122
9	Standard		-36.980221	V	0.500000		18.929568
10	Standard		196.417334	V	6.858175	SK16	21.310765
11	Standard		-67.147550	V	57.314538		21.646258
IMA	Standard		Infinity				24.570533

§ 2.1.1 近轴范围

$$z = \frac{1}{2}ch^2 + \frac{1}{8}c^3h^4 + \frac{1}{16}c^5h^6 + \cdots \qquad \text{球面}$$

$$z = \frac{1}{2}ch^2 + \frac{1}{8}(1+k)c^3h^4 + \frac{1}{16}(1+k)^2c^5h^6 + \cdots \qquad \text{二次曲面}$$

$$z = \frac{ch^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon(ch)^2}} + a_4h^4 + a_6h^6 + a_8h^8 + \cdots \qquad \text{高阶非球面}$$

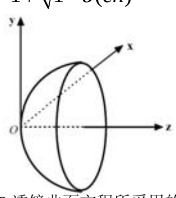


图2-2 透镜曲面方程所采用的坐标系

h 远小于近轴球面半径 r

在光学系统的近轴范围内，其折射面或反射面的面形可由下式表示：

$$z = \frac{1}{2}ch^2 \qquad (2\text{-}1)$$

§ 2.1.2 近轴光线

入射到近轴球面上并与光轴（z 轴）的夹角很小的光线称为近轴光线。

设近轴光线与光轴的夹角为 θ,

$$\sin\theta \approx \theta$$
$$\tan\theta \approx \theta$$
$$\cos\theta \approx 1$$

§ 2.1.3 近轴光学的符号规则及名词术语

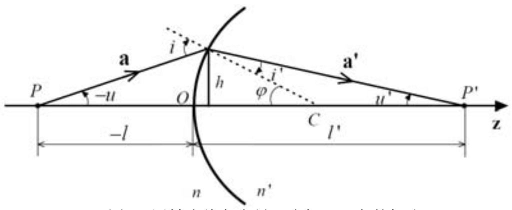


图2-3 近轴光线各参量（坐标）正负的标注

u：物方孔径角、l：物方截距

u'：像方孔径角、l'：像方截距

正负号规定

(1). 线段：轴向线段与数学坐标兼容，以近轴球面顶点为原点，与光线传播方向相同的为正，相反者为负；垂轴线段也与数学坐标兼容，即光轴上方的线段为正，光轴下方的线段为负；

(2). 球面半径：与数学坐标兼容，以球面顶点为原点，球心在顶点右边者取正值，球心在顶点左边者取负值；

轴向线段：以近轴球面顶点为原点，左方线段为负、右方线段为正。

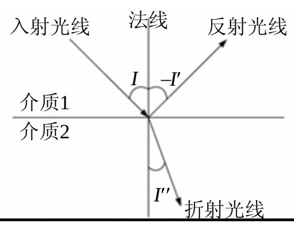
折射没有区别，关键在于反射时的符号。

(3). 角度：角度以锐角度量，其符号规则与数学坐标不同。孔径角以光轴起算转向光线，顺时针旋转取正值(如图**2-4**所示的像方孔径角u')，逆时针旋转取负值(如图**2-4**所示的物方孔径角u)；光线的入射角和折射角则以光线起算转向法线，顺时针旋转为正值，逆时针旋转取负值；光轴与法线的夹角，由光轴转向法线，顺时针为正，逆时针为负。

锐角

光轴→光线→法线

顺正逆负



2.2 单个近轴球面的性质

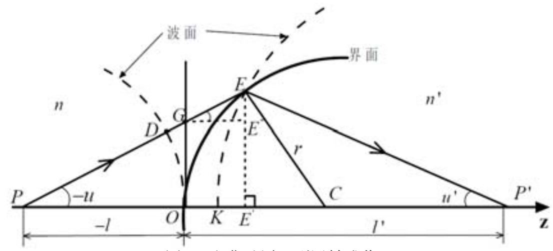


图2-4 由费马原理到近轴成像

$$\underset{\text{P-E-P'}}{[PP']} = nPE + n'EP' \quad = \quad \underset{\text{P-O-P'}}{[PP']} = nPO + n'OP' \qquad (2\text{-}2)$$

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right) = n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right) \qquad (2\text{-}3)$$

$$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r} \qquad (2\text{-}4)$$

近轴球面成像公式

$$h = lu = l'u'$$

$$n'u'-nu = \frac{n'-n}{r}h \qquad (2\text{-}5)$$

式**(2-8)**是近轴球面成像公式的另一种表述形式，在某些情况下用它计算分析更为方便。

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right) = n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)$$

物空间 | 像空间

它是一个不变量，几何光学中称它为阿贝**(Abbe)**不变量

$$A = n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right) = n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right) \qquad (2\text{-}6)$$

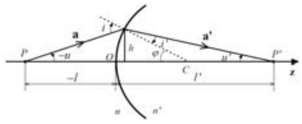
$$n(\frac{h}{r}-u)=n'(\frac{h}{r}-u')$$

物空间 | 像空间

它是另一个不变量，称为折射不变量，简记为**B**

$$B=n(\frac{h}{r}-u)=n'(\frac{h}{r}-u') \qquad (2\text{-}7)$$

近轴光线的追迹公式：



已知物方参数***n*、*l*、*u***

像方参数***n'***

近轴球面半径***r***

$$\begin{cases} i=(\frac{l}{r}-1)u \\ i'=\frac{ni}{n'} \\ u'=u+i-i' \\ l'=r(1+\frac{i'}{u'}) \end{cases} \qquad (2\text{-}8)$$

该套近轴光线的追迹公式，十分重要，使用时亦十分方便。

2.3 单个近轴球面成像的放大率

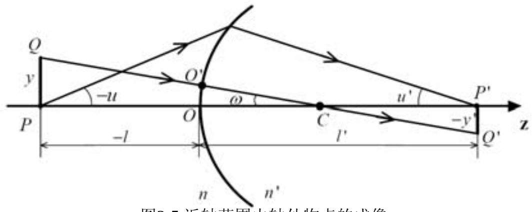
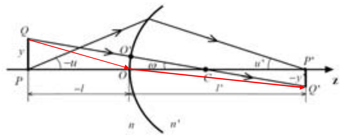


图2-5 近轴范围内轴外物点的成像

§ 2.3.1 横向（垂轴）放大率



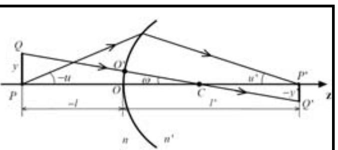
$$\Delta QPC \propto \Delta Q'P'C$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{-y'}{y}=\frac{l'-r}{r-l} \\ A=n(\frac{1}{r}-\frac{1}{l})=n'(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}) \end{aligned}\right\} \frac{y'}{y}=\frac{nl'}{n'l}=\frac{nu}{n'u'}$$

像高与物高之比为单个近轴球面的横向放大率，有时也称垂轴放大率，用希腊字母β表示，即：

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{nu}{n'u'} \qquad (2\text{-}9)$$

§ 2.3.2 轴向放大率



若物平面沿光轴方向移动一微小距离δl，则像平面沿光轴方向移动一微小距离$\delta l'$。定义$\delta l'$与δl之比为轴向放大率，用希腊字母α表示，即：

$$\alpha=\frac{\delta l'}{\delta l} \qquad (2\text{-}10)$$

$$A=n(\frac{1}{r}-\frac{1}{l})=n'(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}) \xrightarrow{\text{求导：}} n\frac{\delta l}{l^2}=n'\frac{\delta l'}{l'^2}$$

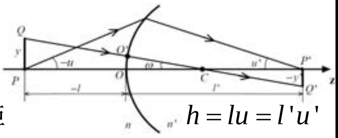
$$\alpha=\frac{\delta l'}{\delta l}=\frac{nl'^2}{n'l^2} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha=\frac{\delta l'}{\delta l}=\frac{nl'^2}{n'l^2} \\ \beta=\frac{y'}{y}=\frac{nu}{n'u'} \\ lu=l'u' \end{aligned}\right\} \alpha=\frac{n'}{n}\beta^2 \qquad (2\text{-}12)$$

两点结论：第一，上式右端总大于零，对于单个近轴球面（系统），像平面的移动方向总是和物平面的移动方向一致。

第二，对于单个近轴球面，无论物体处于什么位置，横向放大率和轴向放大率一般并不相等，说明一个立方体经一个近轴球面成像后并不是一个立方体。

§ 2.3.3 角放大率



$$h = lu = l'u'$$

由物点追踪计算一条近轴光线得到像点后，随之像方截距***l'***与物方截距***l***之比就可确定，同时像高***y'***与物高***y***之比也确定。可确定像方孔径角***u'***与物方孔径角***u***之比：

$$\frac{u'}{u} = \frac{l}{l'} \qquad (2\text{-}13)$$

通常将入射光线和相应的折射光线称为一对共轭光线，共轭光线与光轴夹角之比定义为角放大率，用希腊字母γ表示，即：

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta} \qquad (2\text{-}14)$$

§ 2.3.4 三个放大率之间的关系

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{n'}{n}\beta^2 \\ \gamma &= \frac{u'}{u} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha\gamma = \beta \qquad (2\text{-}15)$$

横向放大率、轴向放大率、角放大率三者之间的关系

§ 2.3.5 光学不变量

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{nu}{n'u'} \Longrightarrow nuy = n'u'y' \qquad (2\text{-}16)$$

在近轴球面折射前后或说成像前后，折射率、孔径角、物（像）高三者乘积是不变的。通常将这个不变量称为光学不变量，亦称拉赫不变量，用大写字母***J***表示，即：

$$J = nuy = n'u'y' \qquad (2\text{-}17)$$

2.4 近轴球面系统中的近轴光线追迹

实际的光学系统往往是由多个折(反)射面串联在一起组成的，而且各个折（反）射面的对称轴是共同的，即共轴光轴系统。

对于共轴系统，近轴光线的计算可以一面一面地逐次计算。像点作为下一面的物点，利用式**(2-11)**循环计算，直至最后一个折射面。

关键问题：随着前一面计算结束向后一面过渡时应将坐标原点同时从前一面的顶点移到后一面的顶点，即坐标原点一定是当前计算面的顶点；建立前一面计算结果与后一面起算数据之间的联系。

§ 2.4.1 近轴球面系统的成像

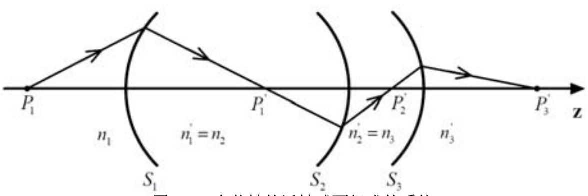


图2-6 三个共轴的近轴球面组成的系统

§ 2.4.2 近轴光学计算中的转面公式

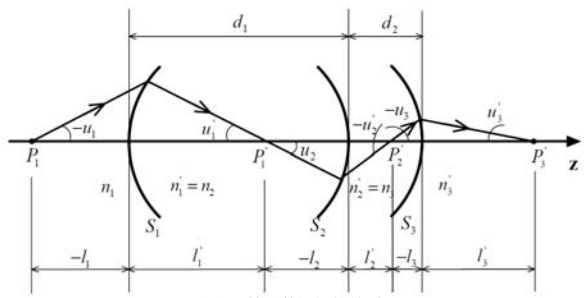
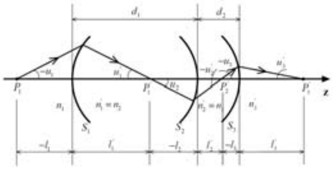


图2-7 转面数据间的关系

已知第一面的物方参数n_1、l_1、u_1以及像方参数n_1'和近轴球面半径r，可求得第一面的像方参数l_1'、u_1'。如何由第一面的像方参数l_1'、u_1'求得第二面的物方参数？



已知第一面和第二面两近轴球面的间隔d_1，则：

$$l_2 = l_1' - d_1$$
$$u_2 = u_1'$$
$$n_2 = n_1'$$

上述三个式子即为由第一面计算向第二面计算过渡的转面公式，写成一般的形式是：

$$l_{i+1} = l_i' - d_i$$
$$u_{i+1} = u_i' \qquad (2\text{-}18)$$
$$n_{i+1} = n_i'$$

如果已知第一面的物方参数n_1、h_1、u_1以及像方参数n_1'和近轴球面半径r，则相应的转面公式为：

$$h_{i+1} = h_i - d_i u_i' \qquad (2\text{-}19)$$

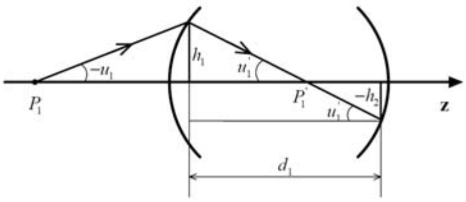


图2-8 转面关系

§ 2.4.3 近轴球面系统的放大率

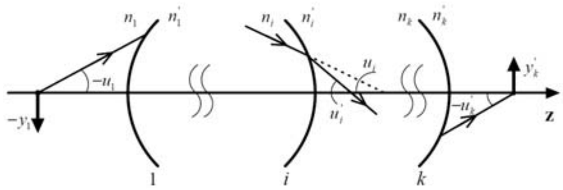


图2-9 近轴球面系统

$$\beta = \beta_k \beta_{k-1} \ldots \beta_i \ldots \beta_1 = \prod_{i=1}^{k} \beta_i$$

整个系统的横向放大率是系统每一面横向放大率的乘积
整个系统的轴向放大率是系统每一面轴向放大率的乘积
整个系统的角放大率是系统每一面角放大率的乘积

- 光学（拉赫）不变量

利用转面关系，可以将单个折射面的光学(拉赫)不变量式推广到整个系统中，即在系统的任一面折射前后折射率、孔径角与物（像）高三者乘积不变，即：

$$J = n_i u_i y_i = n_i' u_i' y_i' \qquad (2\text{-}20)$$

每个近轴球面的作用基本上是将这个光学(拉赫)不变量在孔径角和物（像）高之间重新分配，“基本”二字是暂且没有计入折射率这个因素。

§ 2.4.4 实像、虚像；实物、虚物；物空间、像空间

- 实像、虚像

能用屏接收到的像为实像，不能用屏接收到的像为虚像。

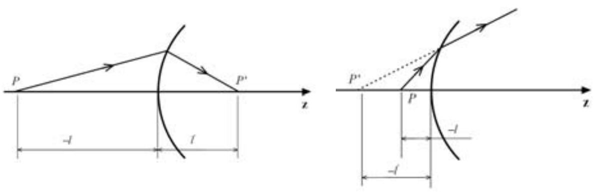


图2-10 实像与虚像

- 实物、虚物

对于给定的单面系统来说，物点是一个实实在在的物点，说它实在是指联系物点和像点的入射光线就是该物点发出的实际光线，所以这个物点称为实物。

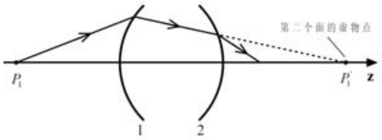


图2-11 实物与虚物

对于给定的单面系统来说，入射光线的延长线（沿着光的行进方向）交于一点，该点为虚物点。

对于整个系统，一定是实物。

- 物空间、像空间

任何具有一定面积或体积的物体，都可看作是由无数发光点集合而成。物体上各点所对应的像点的总体就叫该物体通过光学系统所成的像。

物所在的空间称为“物空间”，像所在的空间称为“像空间”。光学系统第一面以前的空间为“实物空间”，而第一面以后的空间为“虚物空间”；系统最后一面以后的空间称为“实像空间”，而最后一面以前的空间称为“虚像空间”。

整个物空间（包括实物空间和虚物空间）是可以无限扩展的，整个像空间（包括实像空间和虚像空间）也是可以无限扩展的。

2.5 矩阵光学

§ 2.5.1 近轴光线的列矩阵表示

含光轴面(纸面)内的任一近轴光线可用该光线在参考面上的投射高度h，以及它与光轴的夹角u（即孔径角）这两个参数来表示。

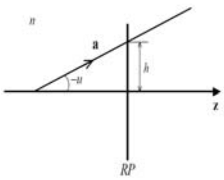


图2-12 近轴光线的标示

为了表明该光线所在的媒质折射率n，将n与u的乘积作为一个参数，称谓光学方向余弦。

图2-13中的光线可用列矩阵**a**表示，即：

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}21)$$

§ 2.5.2 近轴光线的折射矩阵

近轴折射球面，两边媒质的折射率分别为n和n'，近轴球面半径为r。

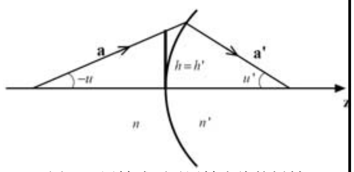


图2-13 近轴球面对近轴光线的折射

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{折射}} \mathbf{a}'=\begin{bmatrix} h' \\ n'u' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{折射}} \mathbf{a}'=\begin{bmatrix} h' \\ n'u' \end{bmatrix}$$

将参考面取在过近轴球面顶点的切平面上，由近轴光线的性质知：

$$h=h'$$

近轴光线在近轴球面上折射前后满足关系：

$$n'u'-nu=\frac{n'-n}{r}h$$

则：

$$\begin{bmatrix} h' \\ n'u' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n'-n}{r} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}22)$$

$$\begin{bmatrix} h' \\ n'u' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n'-n}{r} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix}$$

2×2方阵只含有近轴球面系统的参量，称其为近轴光线的折射矩阵，用**R**简记之，即：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n'-n}{r} & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}23)$$

则：

$$\mathbf{a}'=\mathbf{Ra} \qquad (2\text{-}24)$$

§ 2.5.3 近轴光线的转面矩阵

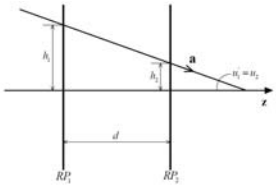


图2-14 近轴光线的转面

光线a无论在参考面RP_1上描述还是在参考面RP_2上描述，它都是同一条光线，所以$u_1'=u_2$。利用近轴光学中的转面关系式：

$$n_2=n_1' \qquad u_2=u_1' \qquad h_2=h_1-d_1u_1'$$

则：

$$\begin{cases} h_2=h_1-\dfrac{d_1}{n_1'}n_1'u_1' \\ n_2u_2=0+n_1'u_1' \end{cases} \tag{2-25}$$

$$\begin{cases} h_2=h_1-\dfrac{d_1}{n_1'}n_1'u_1' \\ n_2u_2=0+n_1'u_1' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} h_2 \\ n_2u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ n_1u_1 \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

近轴光线的转面关系式，**2×2**方阵只含有近轴球面系统的参量，称其为近轴光线的转面矩阵，用**T**简记之，即：

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-27}$$

则：

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{T}\mathbf{a}_1 \tag{2-28}$$

§ 2.5.4 近轴球面系统的特性矩阵

设一近轴光学系统由***K***个折射面（n_i、n_i'、r_i）组成，它有**(*K*-1)**个间隔（厚度）d_i。

K个折射矩阵：
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_i'-n_i}{r_i} & 1 \end{bmatrix}$$

***K*-1** 个转面矩阵：
$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_i}{n_i'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

入射光线$\begin{bmatrix} h_1 \\ n_1u_1 \end{bmatrix}$经这个系统的逐面依次折射

考虑到转面关系，得到出射光线$\begin{bmatrix} h_K' \\ n_K'u_K' \end{bmatrix}$为

$$\begin{bmatrix} h_K' \\ n_K'u_K' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_K'-n_K}{r_K} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{K-1}}{n_{K-1}'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1'-n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ n_1u_1 \end{bmatrix} \tag{2-29}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_K'-n_K}{r_K} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{K-1}}{n_{K-1}'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1'-n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-30}$$

M矩阵中只含有光学系统的参数，称为光学系统的特性矩阵。

$$\mathbf{a}_K'=\mathbf{M}\mathbf{a}_1 \tag{2-31}$$

根据代数学中的一个定理，即“矩阵乘积行列式之值等于各矩阵行列式的乘积”，可得光学系统特性矩阵行列式的值亦为**1**，即：

$$|\mathbf{M}|=1 \tag{2-32}$$

§ 2.5.5 近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

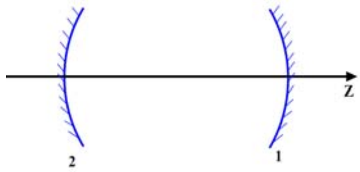


图2-15 激光谐振腔（空腔）

近轴光线的折射矩阵：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n'-n}{r} & 1 \end{bmatrix}$$

折射→反射 $\qquad n'=-n$

反射镜的反射矩阵：
（空气中）

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-2}{r} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-33}$$

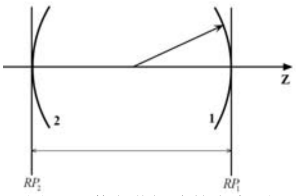


图2-16 激光谐振腔的参考面

反射镜1和2的反射矩阵：

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-2}{r_1} & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{2}{r_2} & 1\end{bmatrix}$$

从$\mathbf{RP}_1$到$\mathbf{RP}_2$的转面矩阵分别为：

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_1}{n_1'}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad(2\text{-}34)$$

$$\mathbf{T}_2=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_2}{n_2'}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad(2\text{-}35)$$

谐振腔的特性矩阵M为：

$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_2\mathbf{R}_2\mathbf{T}_1\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}\qquad(2\text{-}36)$$

设特性矩阵M的两个特征值分别为λ_1和λ_2，属于λ_1和λ_2的特征向量分别为$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$，即：

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1\qquad \mathbf{M}\mathbf{a}_2=\lambda_2\mathbf{a}_2\qquad(2\text{-}37)$$

将近轴光线a表示成两个特征向量的线性组合，即：

$$\mathbf{a}=c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2\qquad(2\text{-}38)$$

c_1、c_2为系数。

$$\mathbf{M}\mathbf{a}=\mathbf{M}(c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2)=c_1\mathbf{M}\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{M}\mathbf{a}_2=c_1\lambda_1\mathbf{a}_1+c_2\lambda_2\mathbf{a}_2\qquad(2\text{-}39)$$

$$\mathbf{M}^2\mathbf{a}=\mathbf{M}(\mathbf{M}(c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2))=\mathbf{M}(c_1\lambda_1\mathbf{a}_1+c_2\lambda_2\mathbf{a}_2)=c_1\lambda_1\mathbf{M}\mathbf{a}_1+c_2\lambda_2\mathbf{M}\mathbf{a}_2=c_1\lambda_1^2\mathbf{a}_1+c_2\lambda_2^2\mathbf{a}_2\qquad(2\text{-}40)$$

$$\mathbf{M}^N\mathbf{a}=c_1\lambda_1^N\mathbf{a}_1+c_2\lambda_2^N\mathbf{a}_2\qquad(2\text{-}41)$$

若欲将来回反射的光线保持在腔内而不从腔的侧面跑出去，则始终要求光线的投射高度h有限，故必须有：

$$|\lambda_1|\le 1\qquad |\lambda_2|\le 1\qquad(2\text{-}42)$$

只有这样，所有的$\mathbf{M}^N\mathbf{a}$可保持在距离光轴的有限范围内，才能建立稳定振荡。

求λ_1和λ_2？

求解：
$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{M}|=0\qquad(2\text{-}43)$$

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ 为单位矩阵。

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{M}|=\begin{vmatrix}\lambda-m_{11} & -m_{12}\\ -m_{21} & \lambda-m_{22}\end{vmatrix}=\lambda^2-(m_{11}+m_{22})\lambda+(m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12})=0\qquad(2\text{-}44)$$

$$m_{11}+m_{22}=2+\frac{4d}{r_1}-\frac{4d}{r_2}-\frac{4d^2}{r_1r_2}=-2+4(1+\frac{d}{r_1})(1-\frac{d}{r_2})\qquad(2\text{-}45)$$

$$\lambda^2-(m_{11}+m_{22})\lambda+(m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12})=0$$

根据初等方程论知：

$$\lambda_1+\lambda_2=m_{11}+m_{22}=-2+4(1+\frac{d}{r_1})(1-\frac{d}{r_2})\qquad(2\text{-}46)$$

$$|\lambda_1|\le 1\quad |\lambda_2|\le 1\ \Longrightarrow\ -2\le\lambda_1+\lambda_2\le 2\qquad(2\text{-}47)$$

$$0\le(1+\frac{d}{r_1})(1-\frac{d}{r_2})\le 1\qquad(2\text{-}48)$$

近轴光线连续在腔内反射而不从腔的侧面逸出腔外所必须满足的条件，亦即稳定腔的结构所必须满足的条件。

必要条件，但非充分条件。

小结：

近轴球面和近轴光线

单个近轴球面的性质：成像公式、光学不变量
不同形式的光线追迹
α、β、γ

近轴球面系统的成像，转面公式、光线追迹、αβγ

矩阵光学及其应用