第四章

平面反射镜与反射棱镜

4.1平面反射镜

1、平面反射镜的成像

实物成虚像

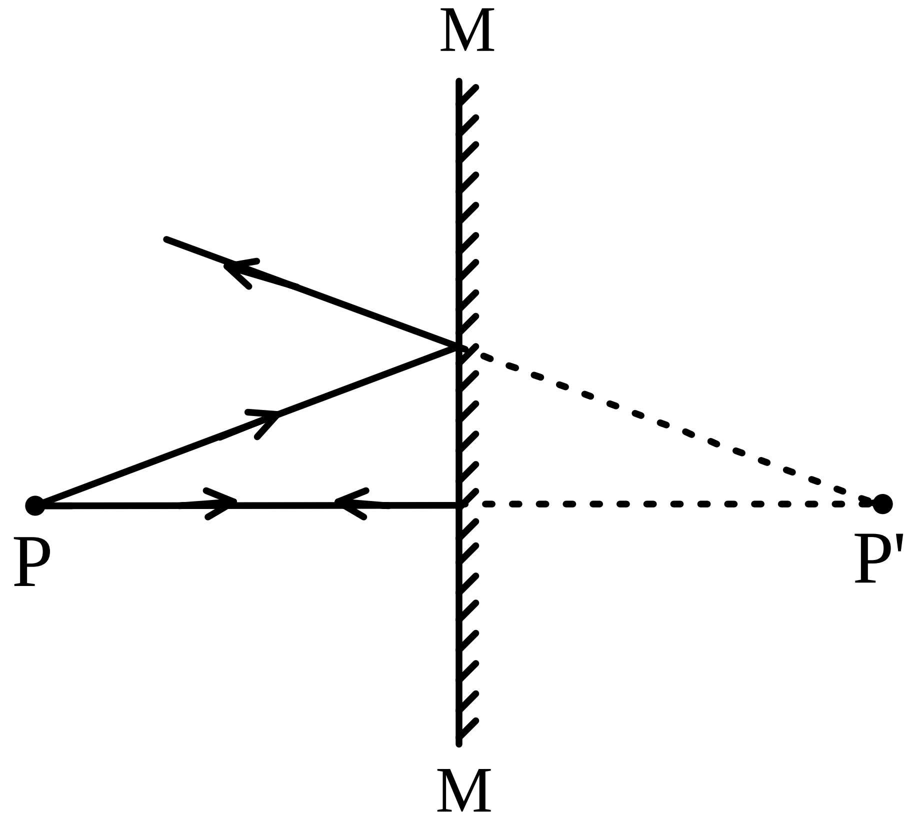


图4-1 平面反射镜成像

平面反射镜的成像

虚物成实像

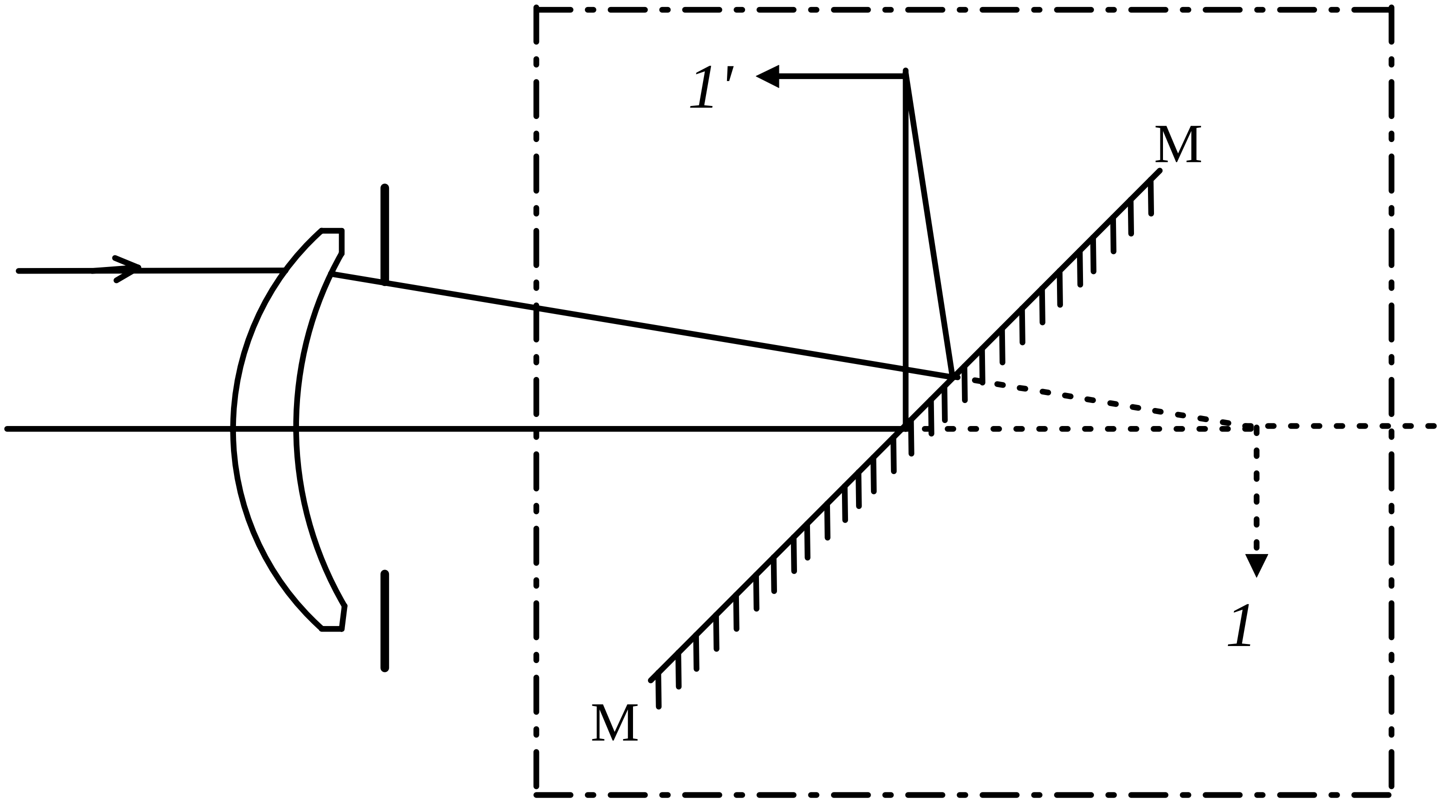


图4-2 虚物经平面反射镜成实像

2、平面反射镜的成像方向

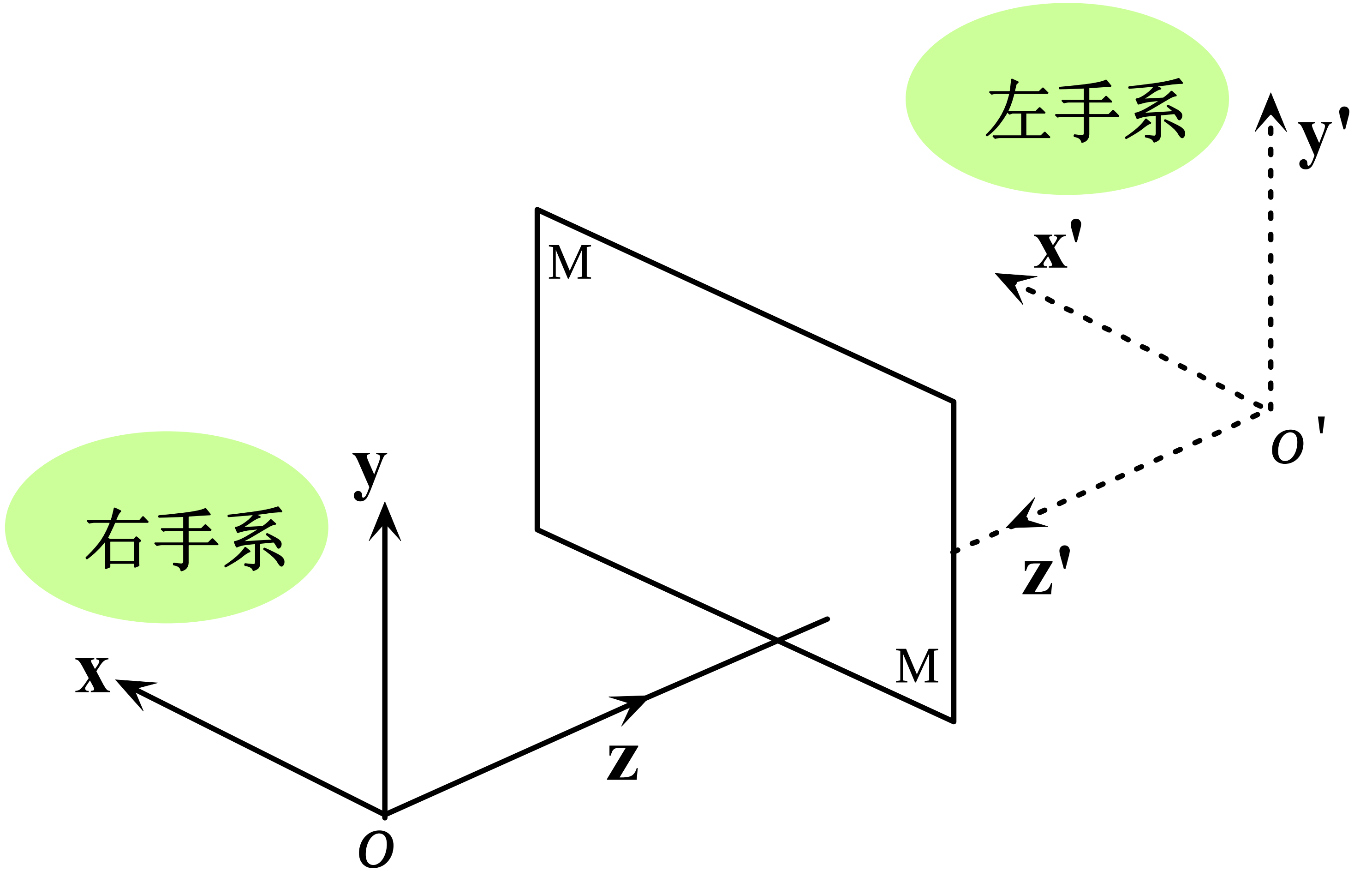


图4-3 平面反射的物像空间对应关系

平面反射镜的成像方向

右手直角坐标系经偶数次平面反射镜成像则像一定是右手系 ——**相似像**

右手直角坐标系经奇数次平面反射镜成像则像一定是左手系 ——**镜像**

3、平面反射镜的旋转对光线的作用

角度放大

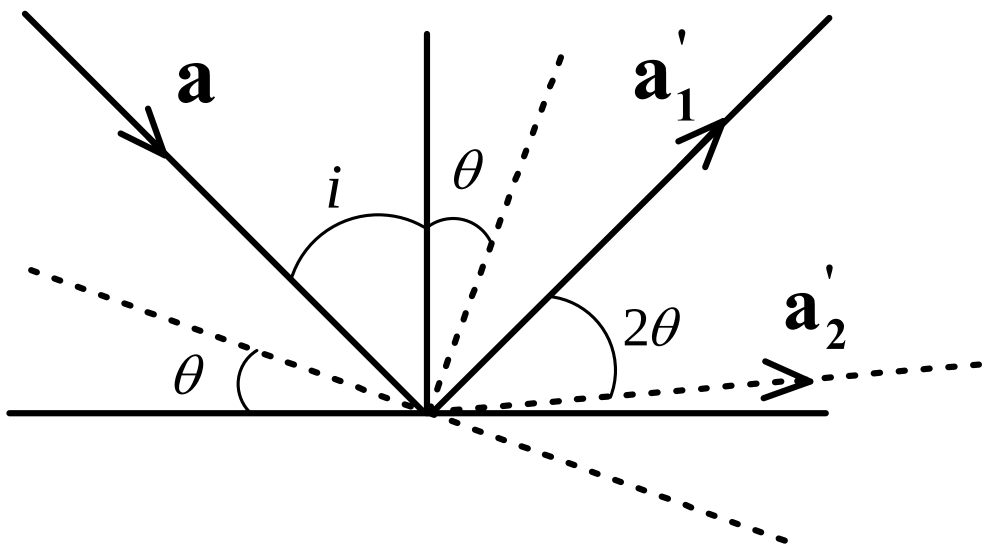


图4-4 平面反射的旋转

4、双平面反射镜系统

$$2i_1 = 2i_2 + \psi \qquad (4\text{-}1)$$

即

$$\psi = 2(i_1 - i_2) \qquad (4\text{-}2)$$

由 ΔO_1O_2T

$$i_1 = i_2 + \theta \qquad (4\text{-}3)$$

即

$$\theta = i_1 - i_2 \qquad (4\text{-}4)$$

$$\boxed{\psi = 2\theta} \qquad (4\text{-}5)$$

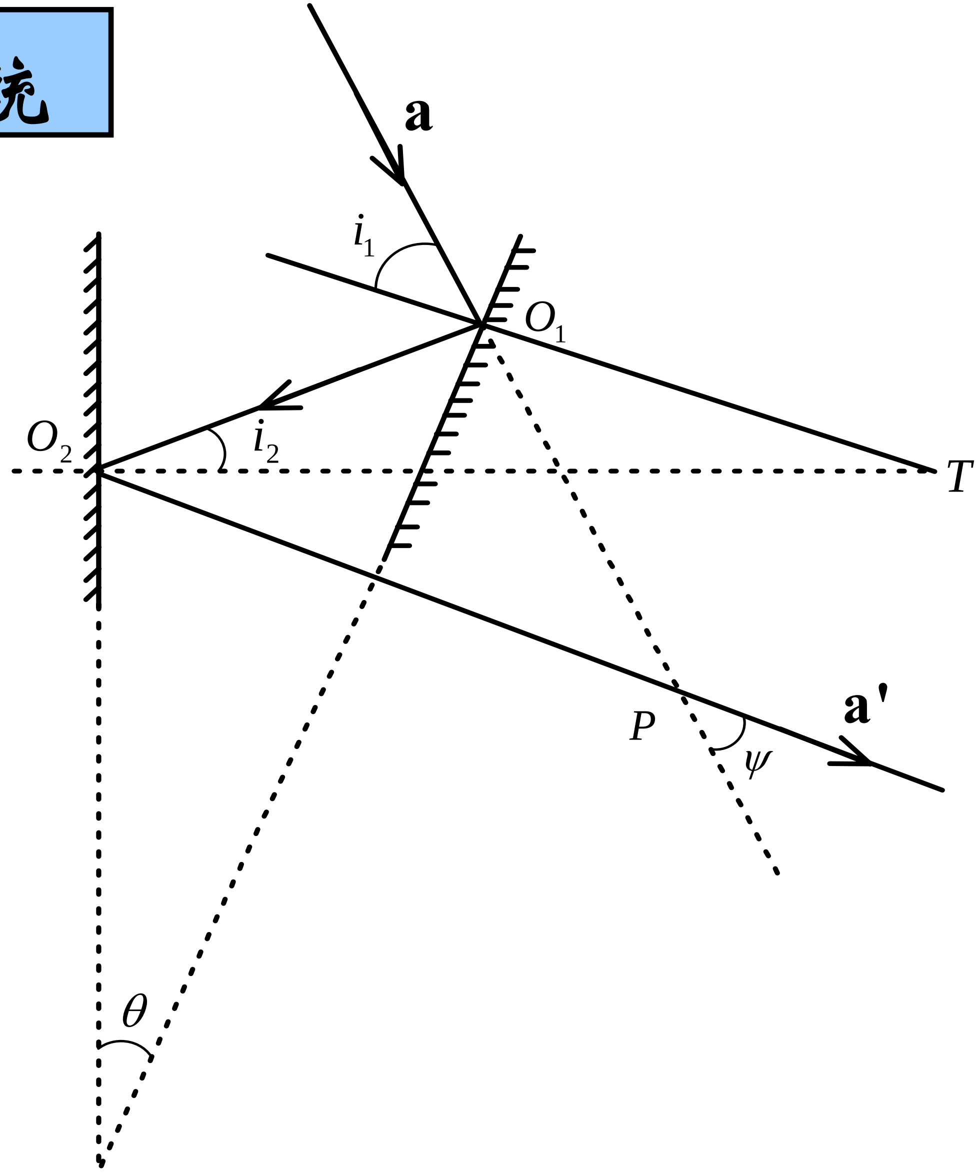


图4-5 双平面反射镜系统

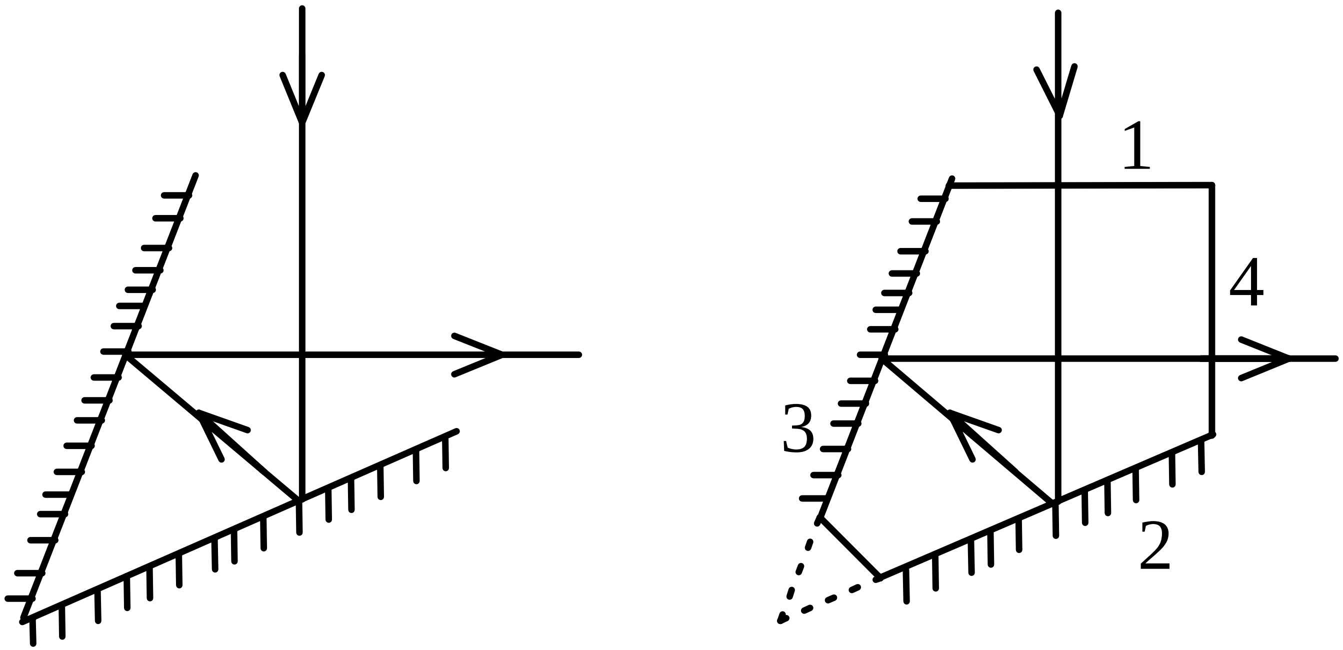
双平面反射镜系统

- 位于与两平面反射镜交棱相垂直平面内的光线，不论它的入射光线方向如何，经两个平面反射镜各反射一次后的出射光线相对于入射光线的偏转角总是等于两平面反射镜夹角的2倍；

- 它的偏转方向，则与反射面按反射次序由 M_1偏转到 M_2的方向相同；

- 入射光线的方向不变时，若两块平面反射镜作为一个刚体一起转动时，则出射光线的方向不会改变，但出射光线的位置可能平行位移。

双平面反射镜系统



(a) (b)

图4-6 能将光路转折的双平面反射镜和反射棱镜

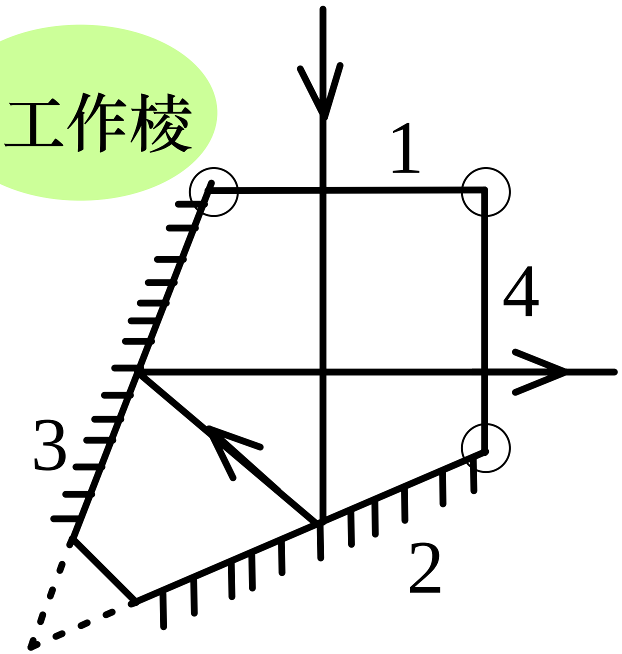
4.2

反射棱镜

为了使两反射面之间的夹角不变，可将两个反射面做在同一块玻璃上，以代替一般的双平面反射镜组，这就构成了另一类常用的光学元件—反射棱镜的雏形

1、反射棱镜的展开特征

工作棱



(4−6b)

1：入射面

2：反射面

3：反射面

4：出射面

工作面

主截面

反射棱镜的展开特征

棱镜的展开

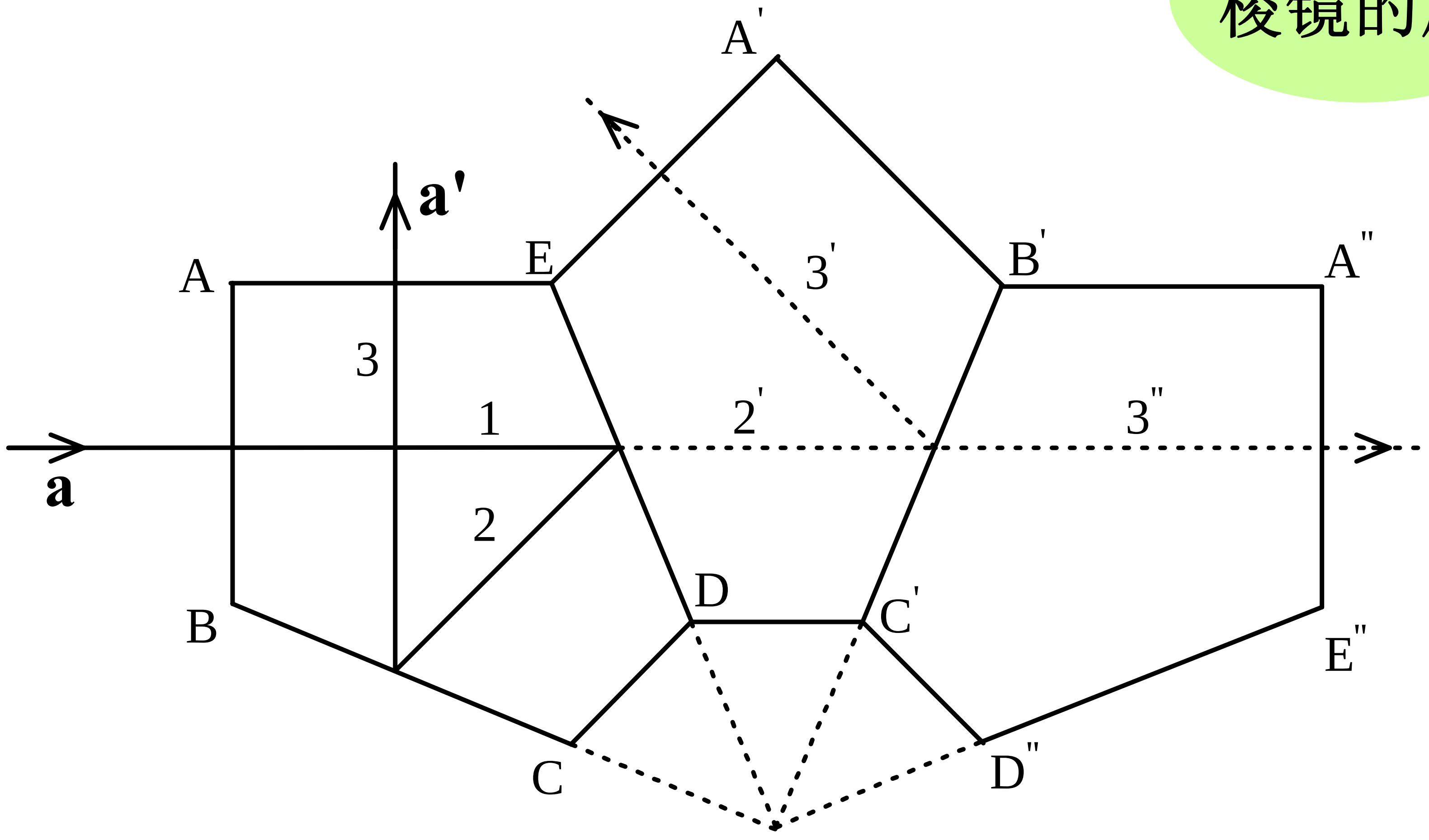


图4-7 五角棱镜及五角棱镜的展开

反射棱镜的展开特征

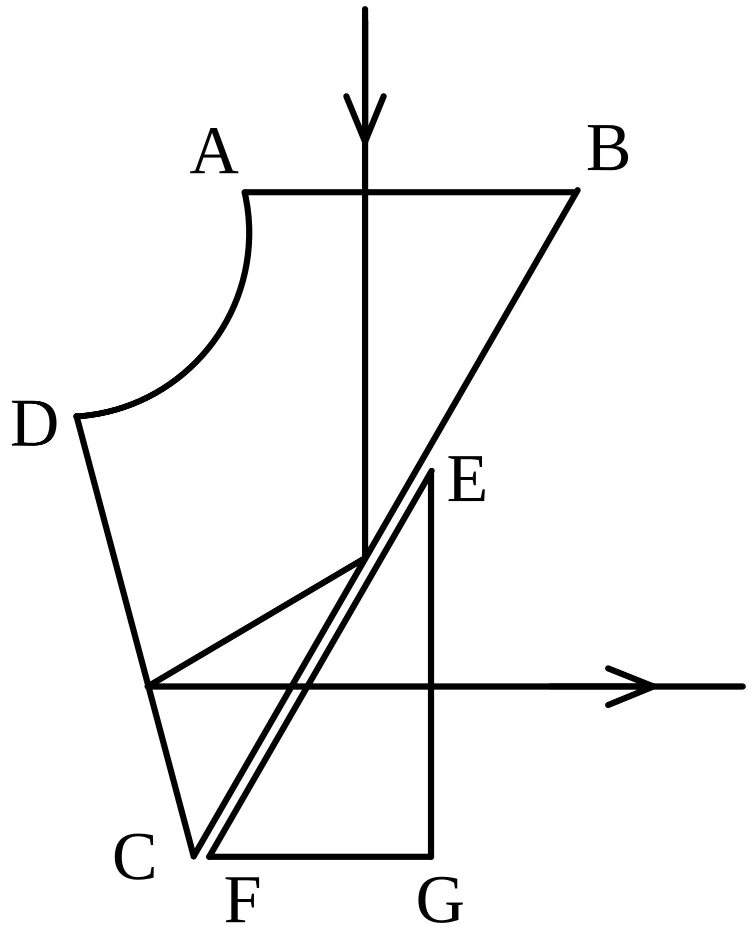


图4-8 靴形棱镜

反射棱镜的展开特征

- 反射棱镜展开后是一块平行平板；
- 在共轴光路中应用反射棱镜就相当于在光路中加入了一块平行平板玻璃；
- 若它被用在会聚光路中，光路的光轴垂直于反射棱镜的入射面，反射棱镜的加入仍然保持了光路系统的共轴性；
- 棱镜展开成平行平板后，其平行平板的厚度也称为棱镜的展开长度。展开长度不仅与棱镜的结构有关，还与棱镜入射面的口径大小有关。设五角棱镜的入射面口径$AB=\Phi$，则展开长度 L 为 $(2+\sqrt{2})\Phi$，即五角 $L_{五角}=3.14\Phi$ 。

2、平行平板的成像

$$\beta = \frac{u_1}{u_2'} = 1$$

(4-6)

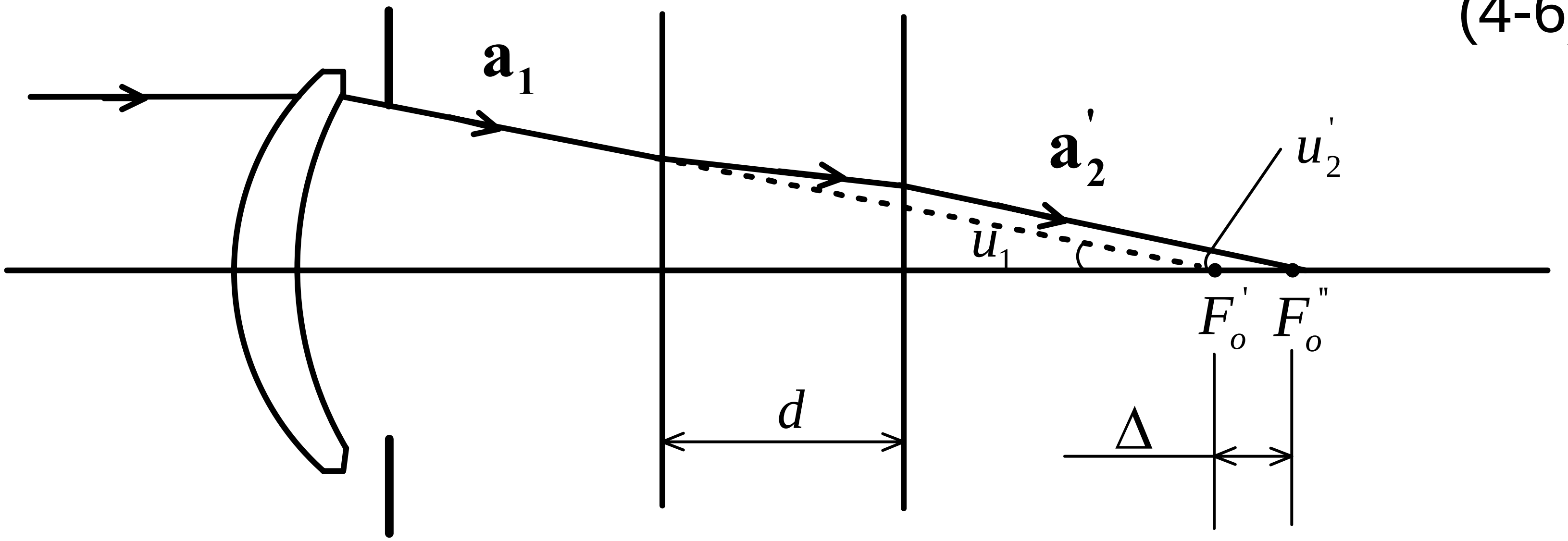


图4-9 平板玻璃的成像

平行平板的成像

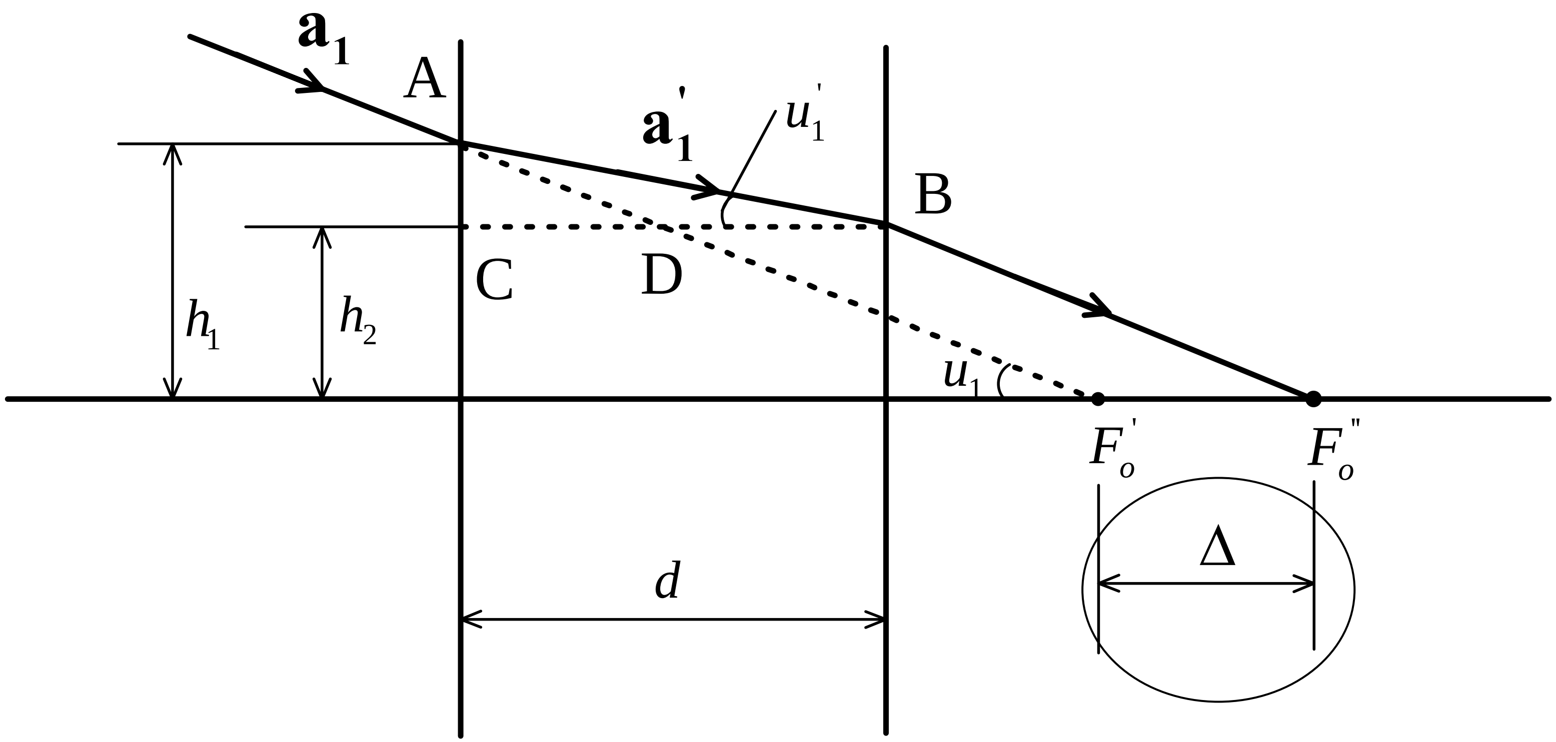


图4-10 平板玻璃的延伸量

平行平板的成像

$$AC = h_1 - h_2 = du_1' \qquad (4\text{-}7)$$

在直角三角形ACD中

$$CD = \frac{AC}{u_1} = \frac{du_1'}{u_1} \qquad (4\text{-}8)$$

近轴近似下，根据折射定律 $u_1 = nu_1'$

$$CD = \frac{d}{n} \qquad (4\text{-}9)$$

$$\Delta = F_o'F_o'' = BD = d - CD = d(1 - \frac{1}{n}) \qquad (4\text{-}10)$$

3、反射棱镜的正像作用

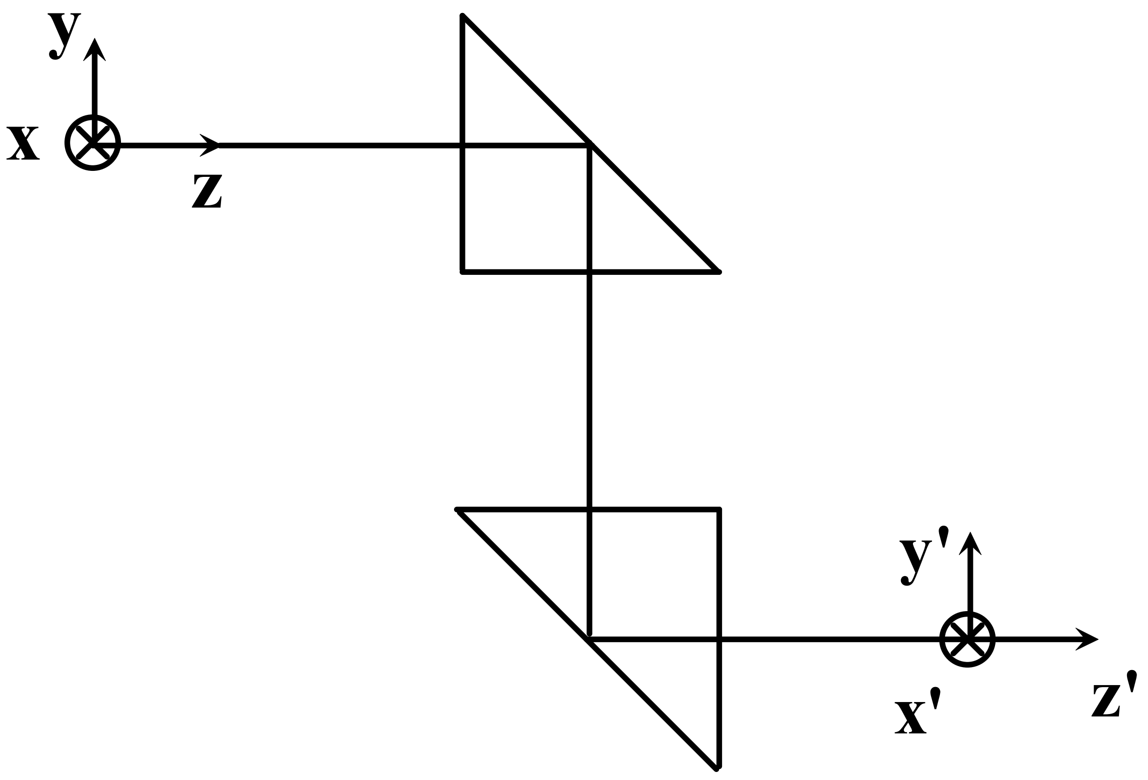


图4-11 反射棱镜的物方坐标系和像方坐标系

反射棱镜的正像作用

反射棱镜系统

1、具有单一主截面的棱镜或棱镜系统

2、屋脊棱镜

3、具有两个相互垂直的主截面的棱镜或棱镜系统

例1： 一次反射直角棱镜的成像分析

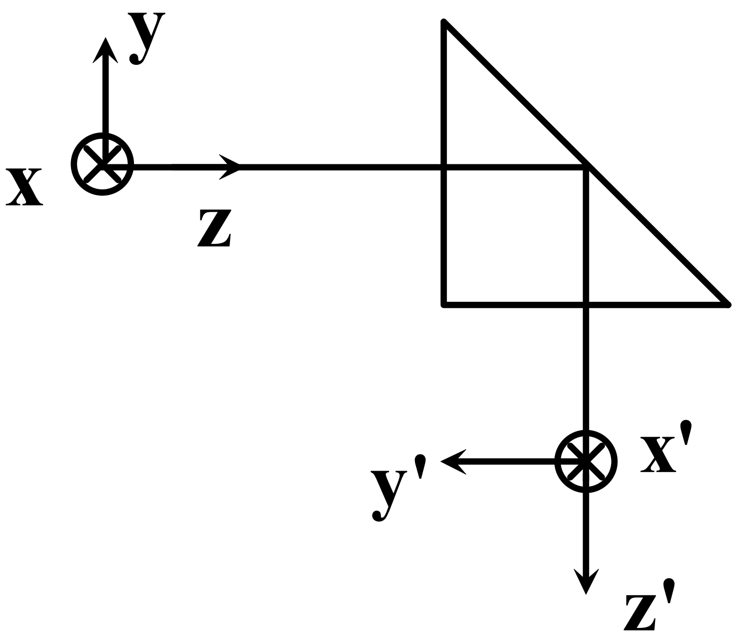


图4-12 一次反射的直角棱镜

反射棱镜的正像作用

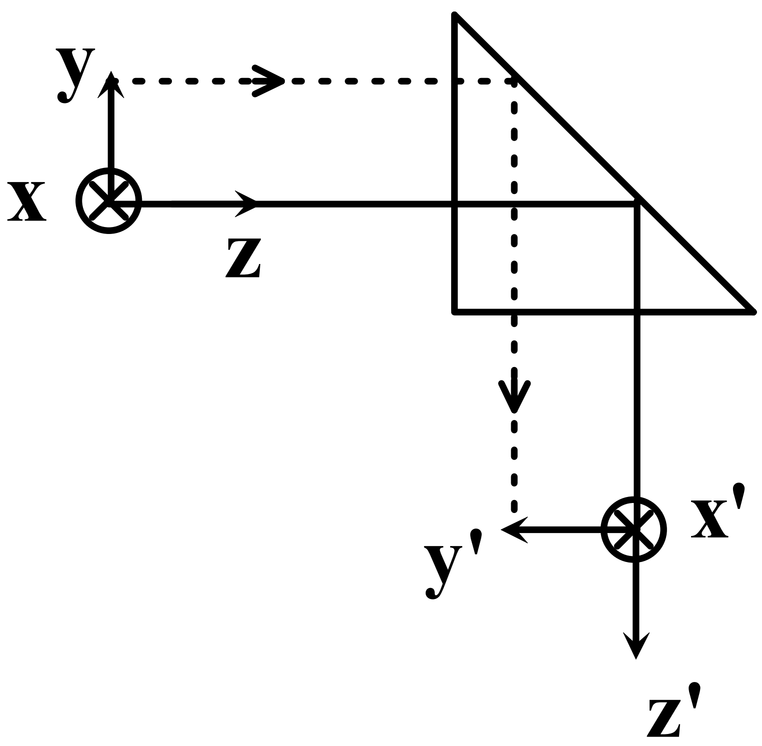


图4-13 确定 y轴成像方向的另一种方法

例2： 二次反射直角棱镜的成像分析

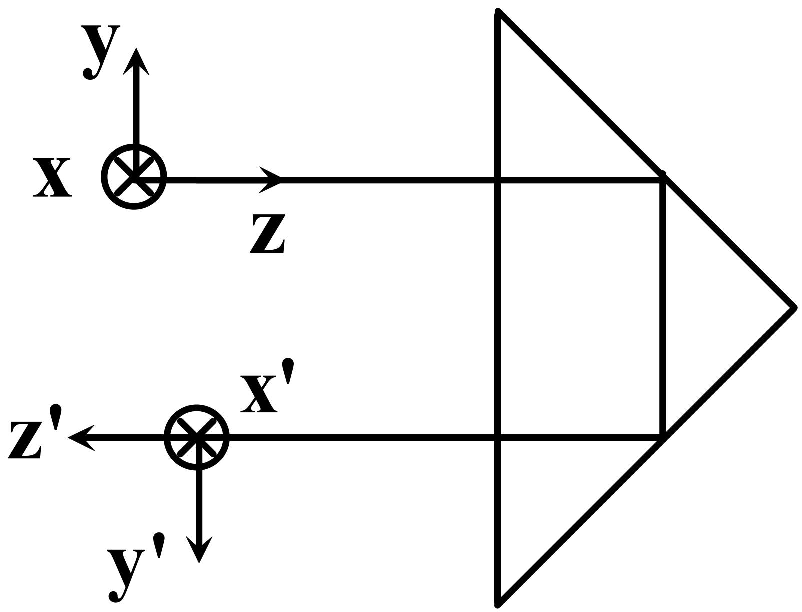


图4-14 二次反射的直角棱镜

反射棱镜的正像作用

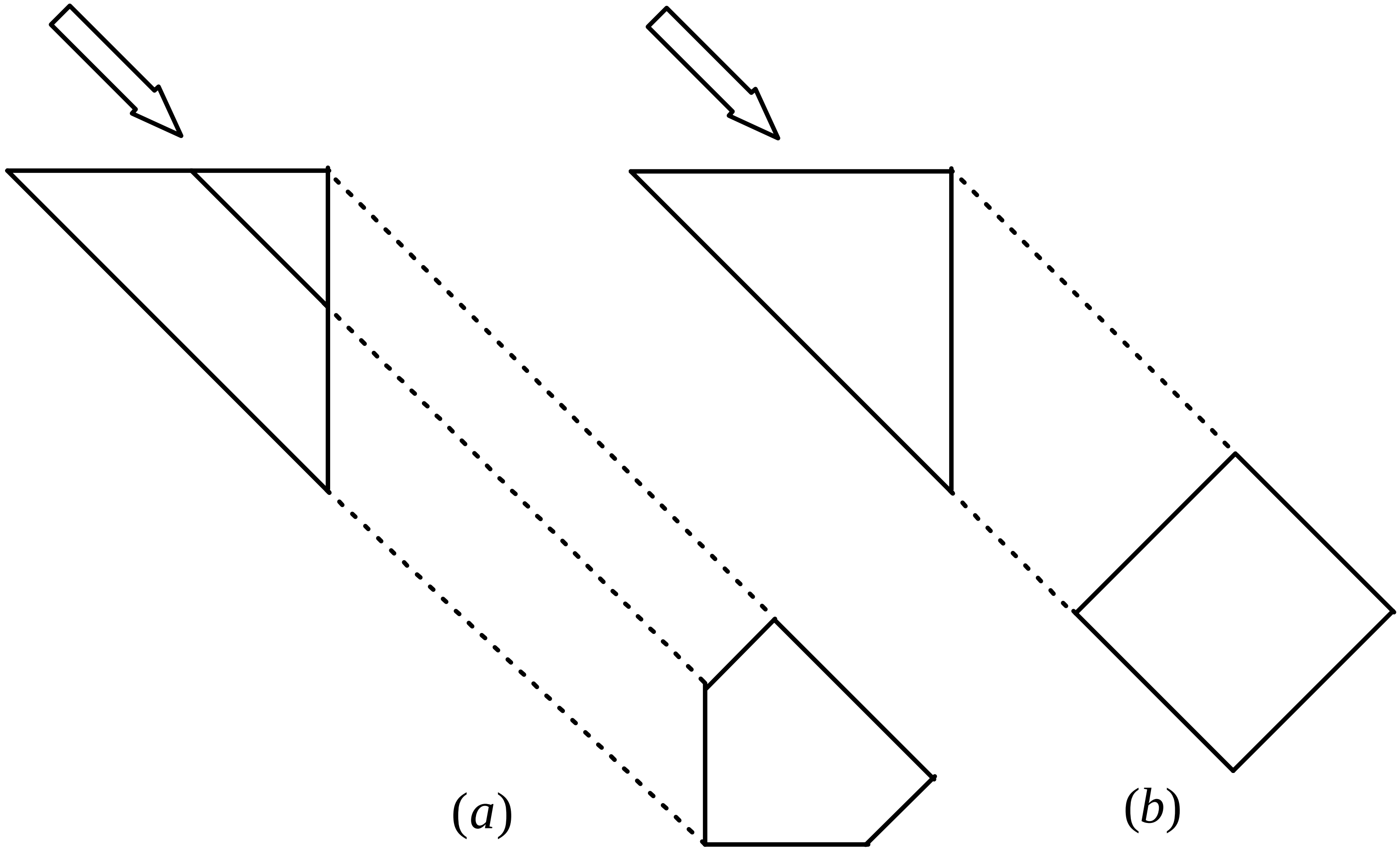


图4-15 (a),(b)　直角屋脊棱镜

反射棱镜的正像作用

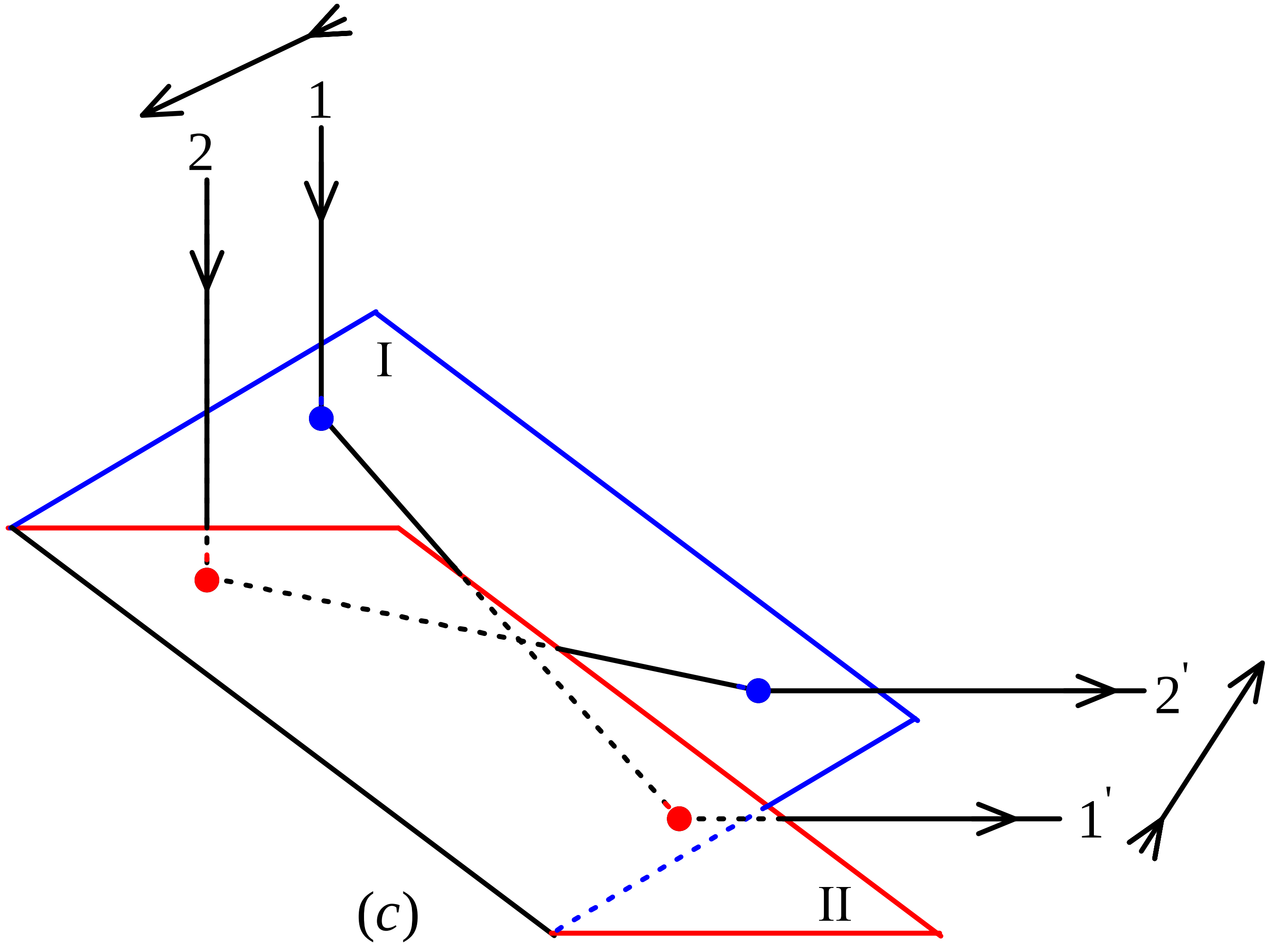


图4-15 (c)　屋脊面对光线的反射作用

反射棱镜的正像作用

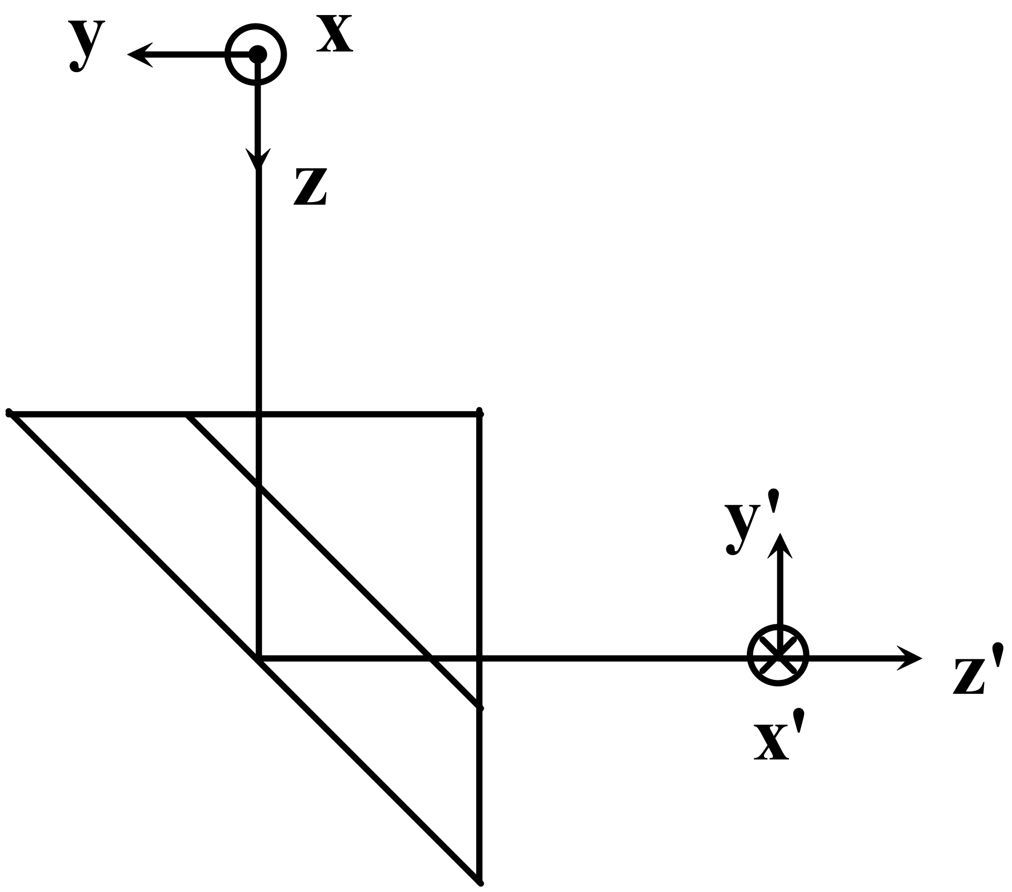


图4-15 (d)　直角屋脊棱镜的成像方向确定

反射棱镜的正像作用

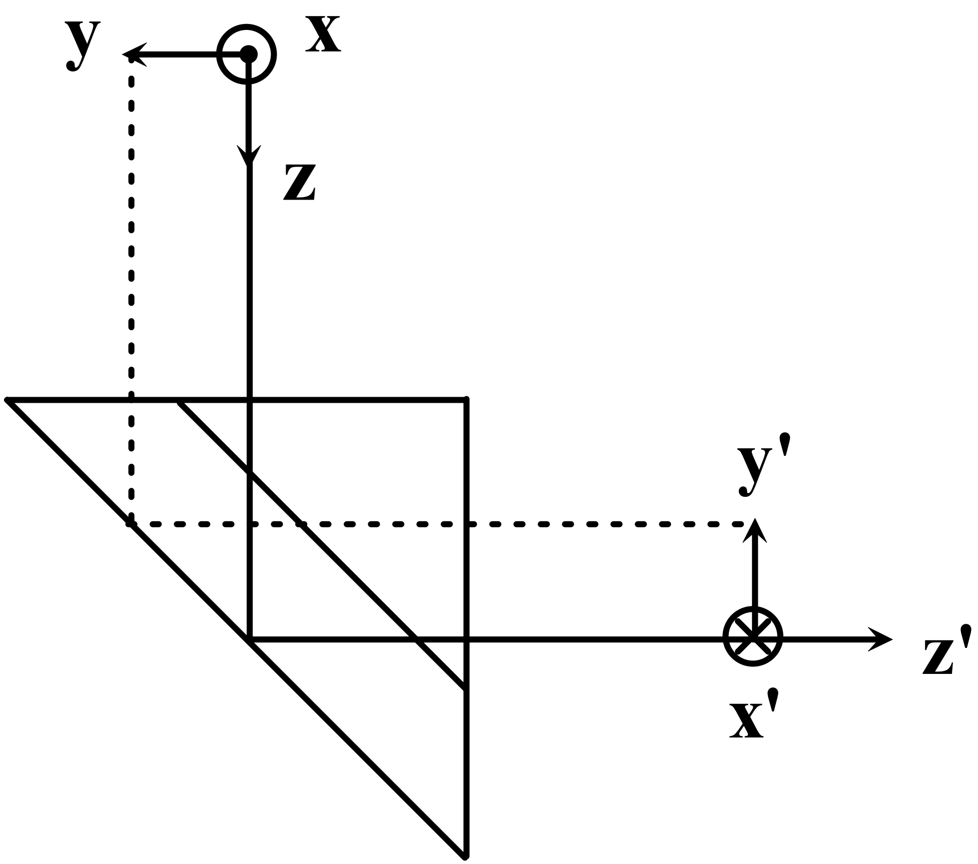


图4-15 (e) 在直角屋脊棱镜中确定 y 轴成像方向的另一种方法

反射棱镜的正像作用

确定屋脊棱镜成像方向的一般方法和步骤：

(1).按光轴是在屋脊棱上被反射的情况确定出出射光轴 z' 的方向；

(2).根据一对屋脊面颠倒了垂直于主截面的物像方向的结论确定 x' 轴的方向；

(3).按棱镜的总反射次数的奇偶性（一对屋脊面算两个反射面）确定像方坐标系 $x'y'z'$ 是左手系还是右手系，从而定出位于主截面内的轴 y' 的方向。

例3：列曼屋脊棱镜的成像方向分析，
并与列曼棱镜的成像方向作比较

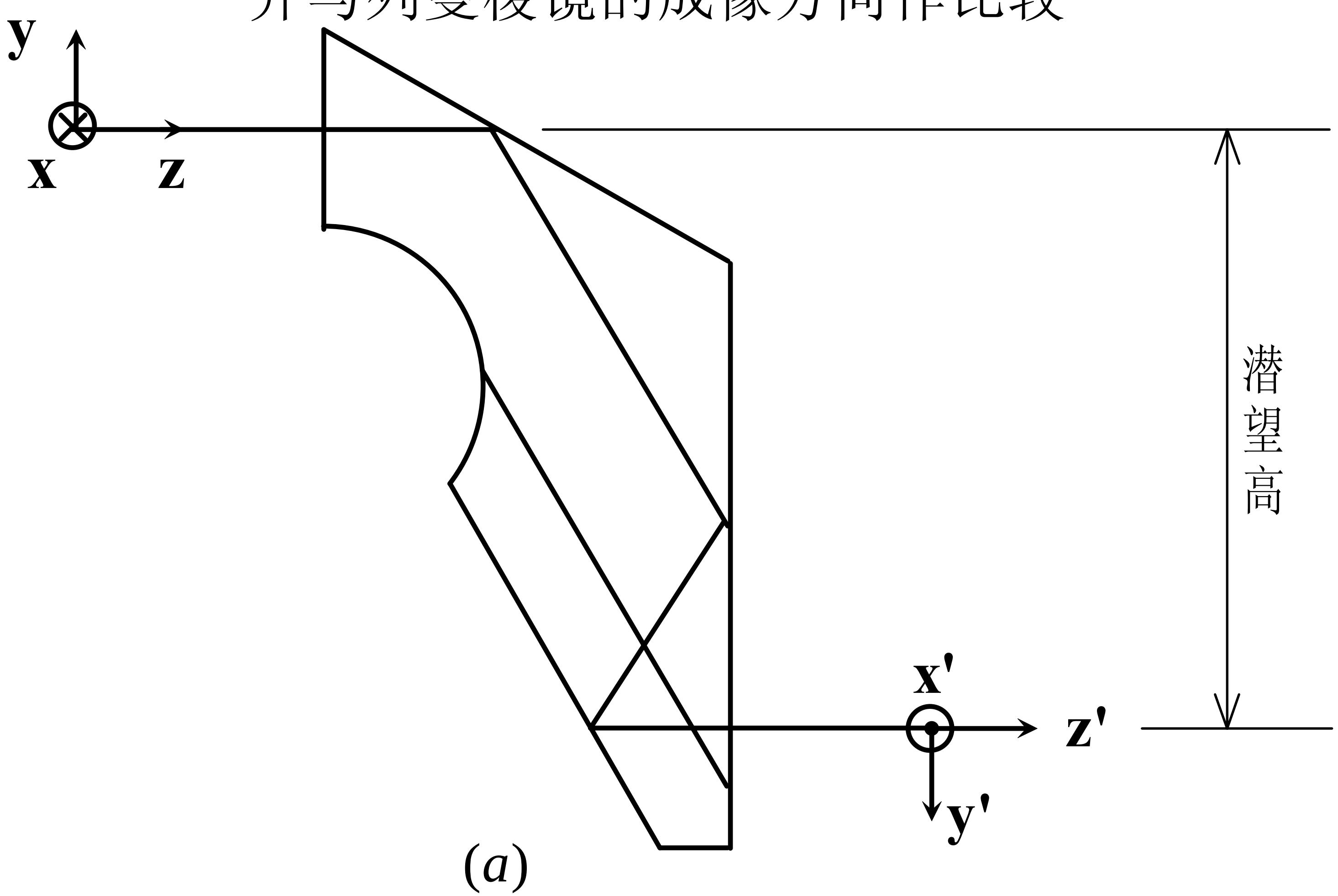


图4-16 列曼屋脊棱镜的成像(a)

反射棱镜的正像作用

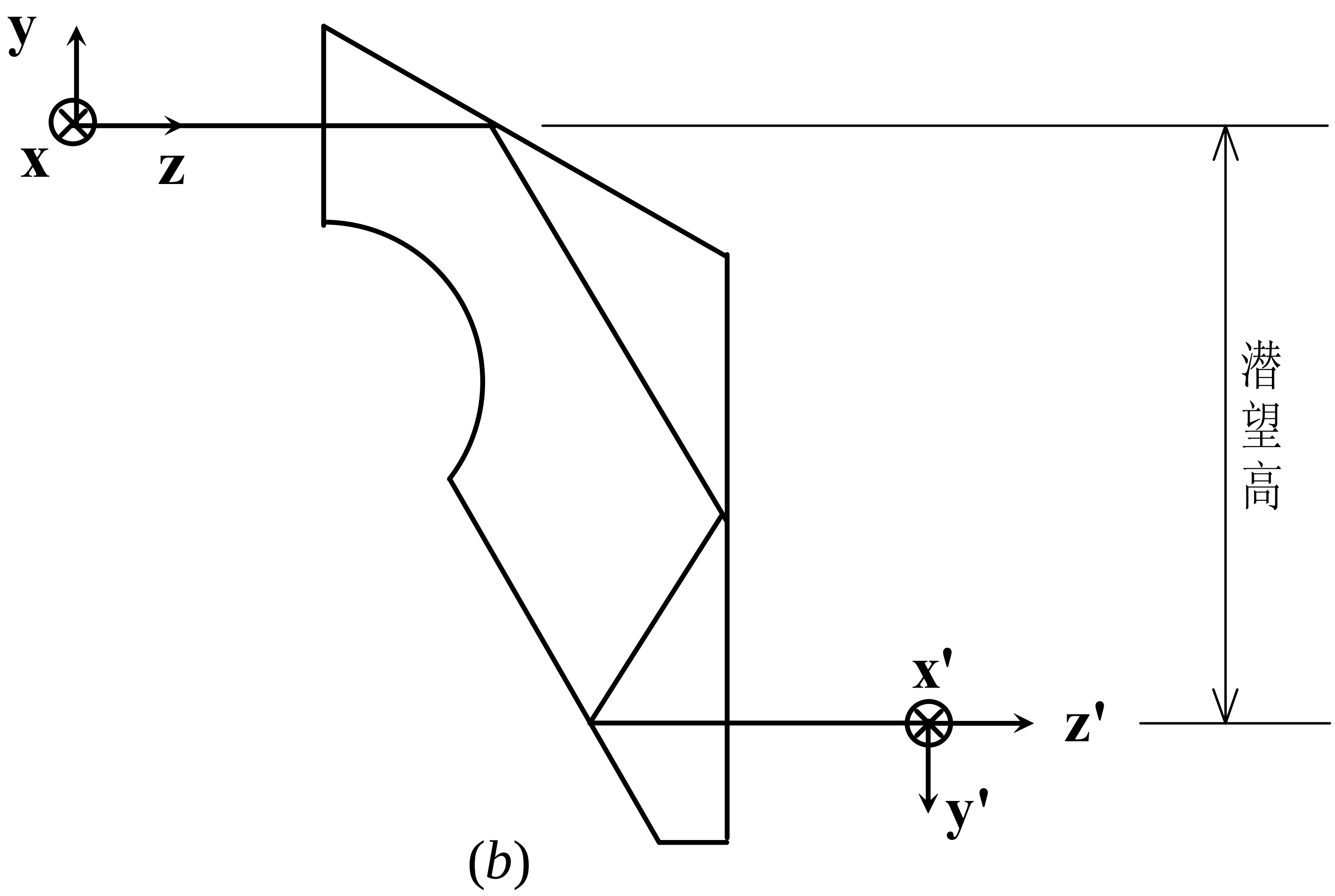


图4-16 列曼棱镜的成像(b)

反射棱镜的正像作用

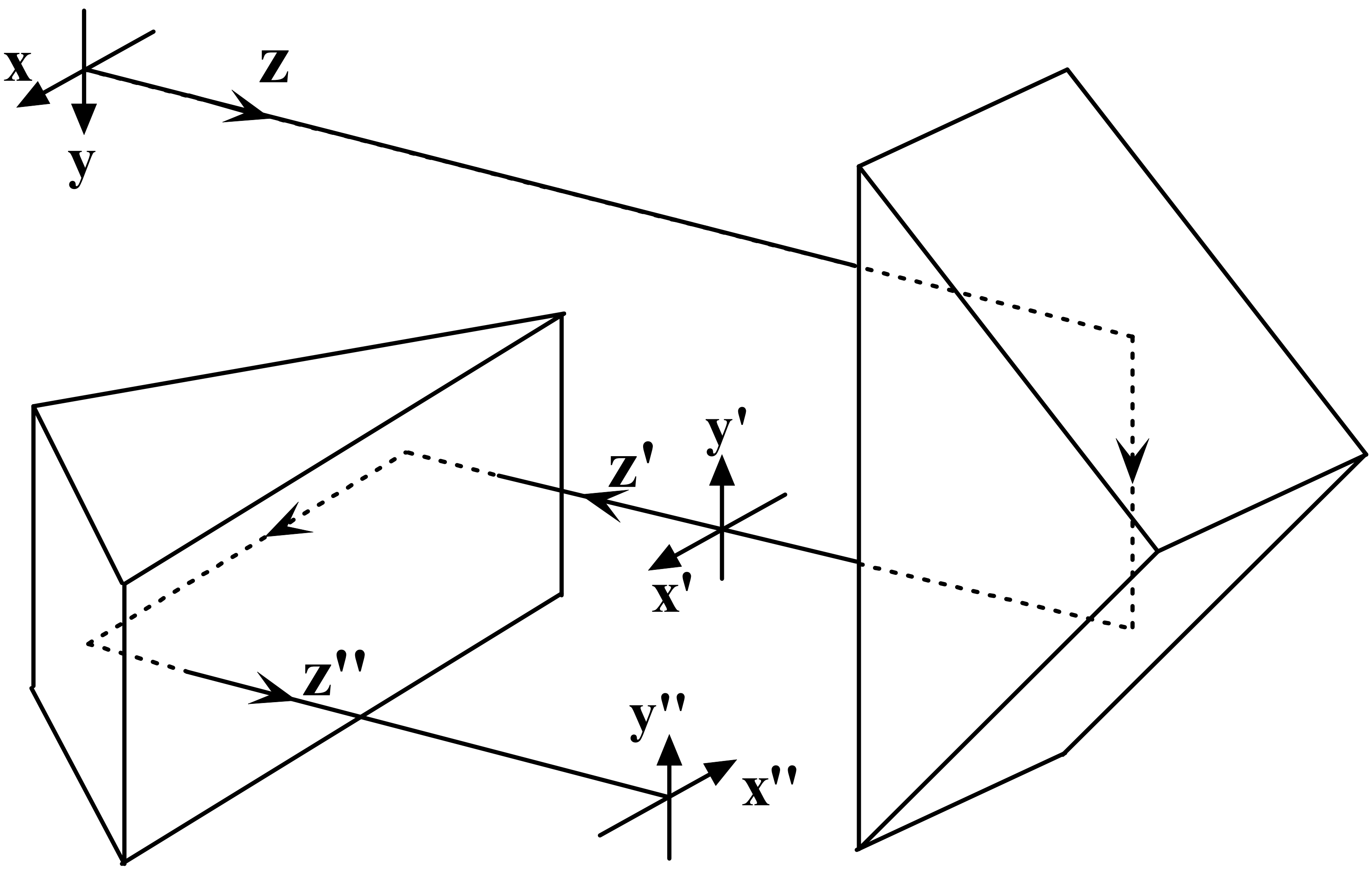
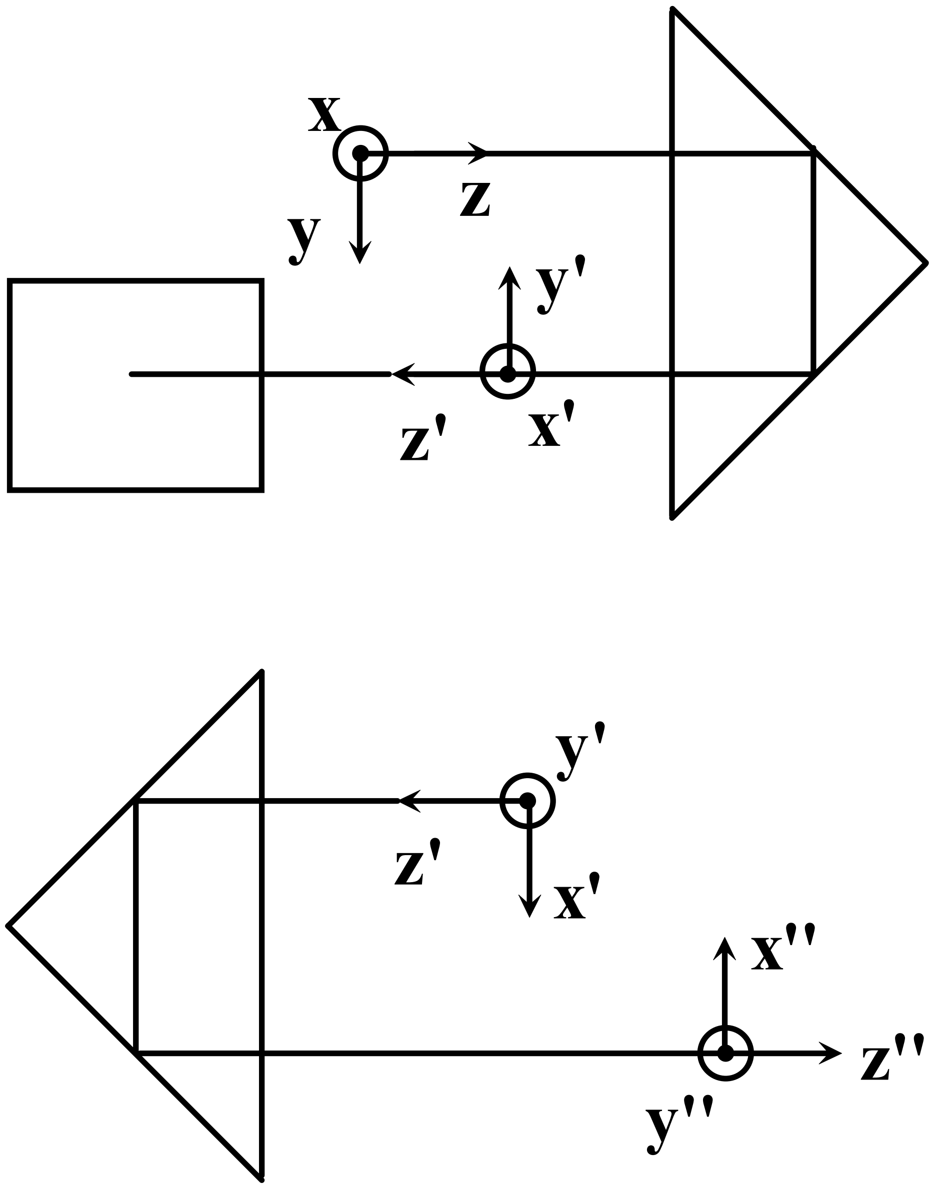


图4-17 (a)　普罗棱镜

反射棱镜的正像作用

图4-17(b) 普罗棱镜的主截面



反射棱镜的正像作用

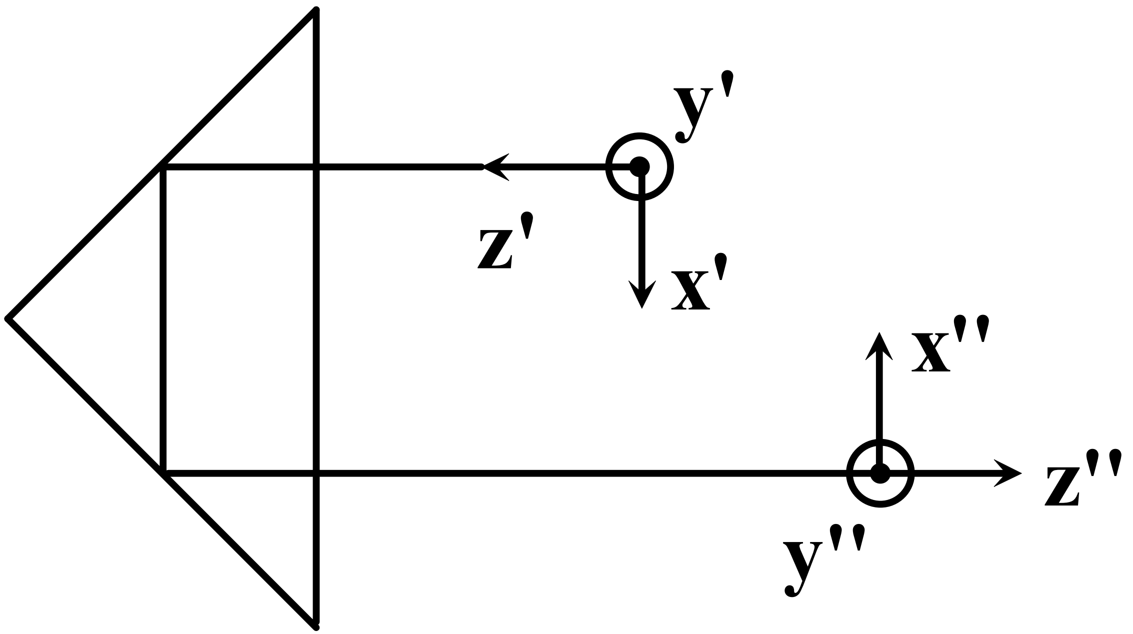


图4-17(c)　普罗棱镜中第二块直角棱镜的成像

4.3
反射棱镜转动引起的光轴方向和成像方向变化的分析和计算

在光学仪器的装校过程中，往往利用反射棱镜的微量转动调整光学系统的光轴方向和成像方向的倾斜

1、棱镜转动定理

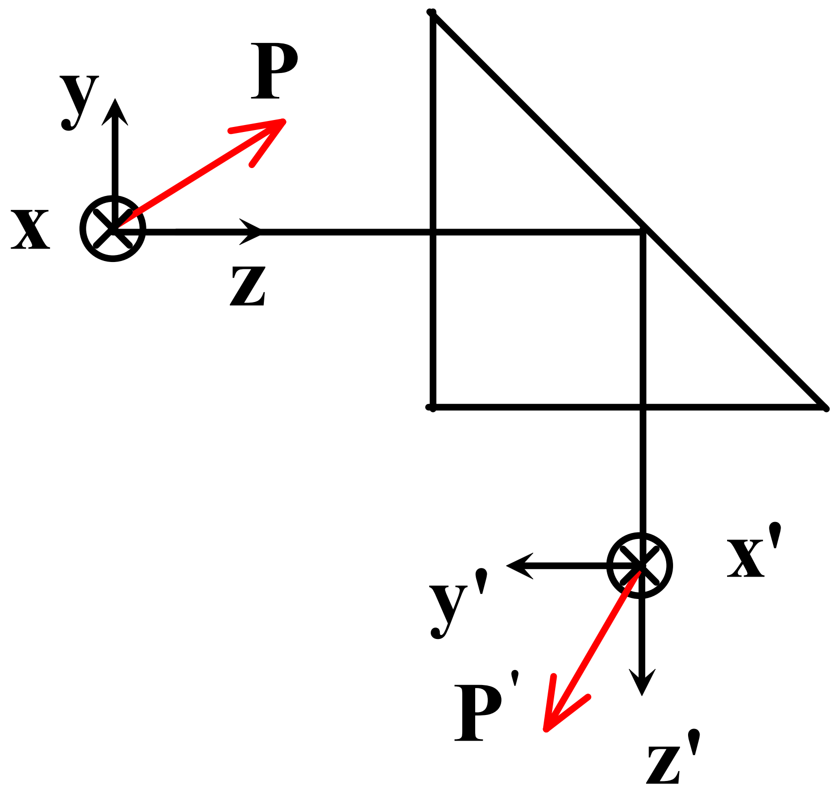


图4-18 转轴 **P** 与它经棱镜所成的像**P'**

棱镜转动定理

棱镜绕转轴 $\mathbf{P}$ 转动 θ（θ角的正负按右螺旋法则确定）角后，像空间坐标系 $x'y'z'$ 的转动情况可以表述如下：

$x'y'z'$首先绕 $\mathbf{P}'$转 $(-1)^{N-1}\theta$，然后绕 $\mathbf{P}$转θ。

其中，N是棱镜的反射次数。

棱镜转动定理

棱镜转动定理

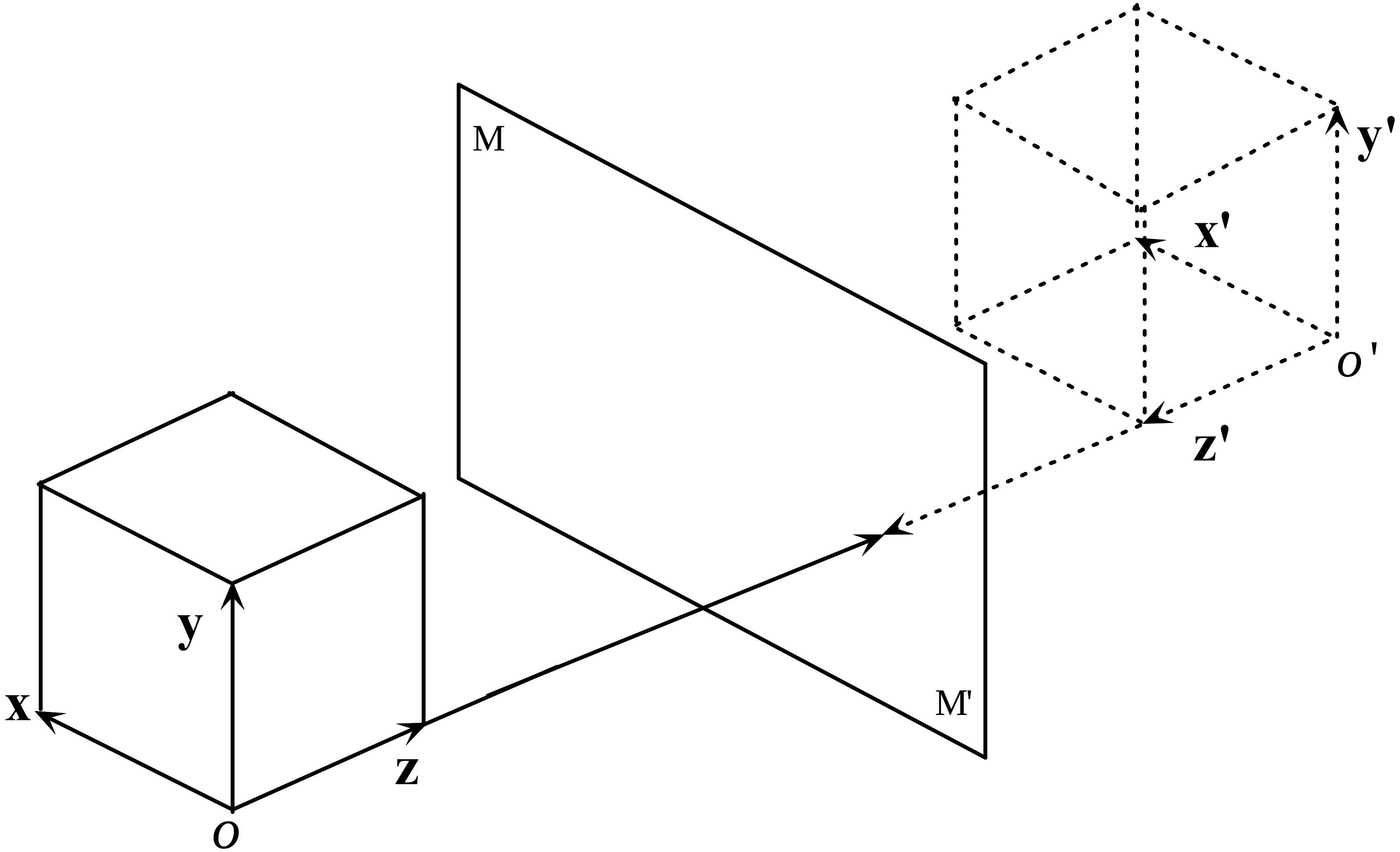


图4-19 立方体 xyz 与立方体经平面反射镜所成的像 $x'y'z'$

棱镜转动定理

第一步：物绕P轴转$-\theta$角　棱镜不动　像绕P′轴转$(-1)^{N-1}$角

第二步：物绕P轴转θ角　棱镜绕P轴转θ角　像绕P轴转θ角

总结果：物不动　棱镜绕P轴转θ角　像先绕P′轴转$(-1)^{N-1}\theta$角

再绕P轴转θ角

2、转动矩阵

$$\mathbf{g}^{'} = \mathbf{g} + \Delta\theta\mathbf{P} \times \mathbf{g}$$

(4-11)

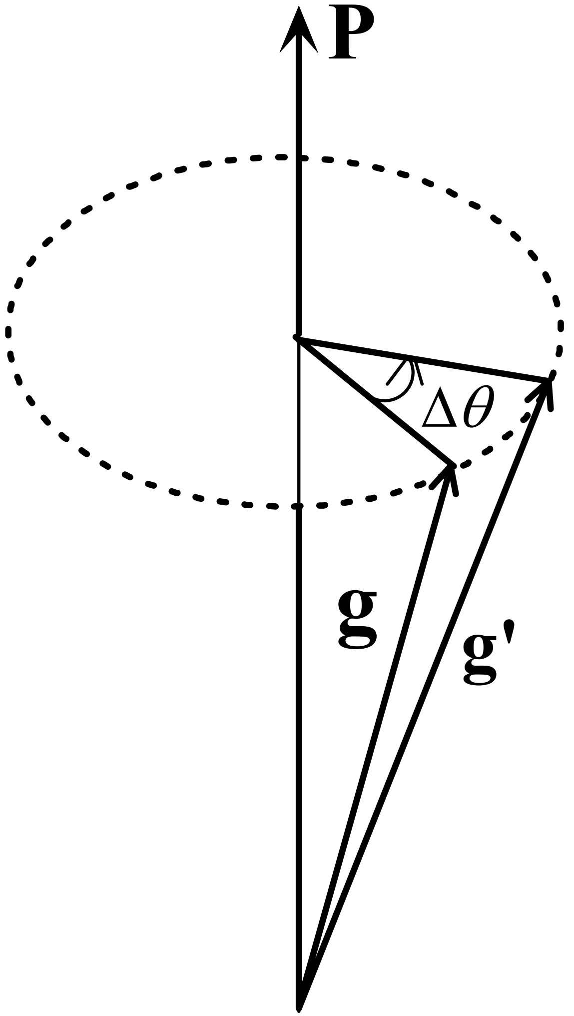


图4-20 向量$\mathbf{g}$绕轴 $\mathbf{P}$旋转角$\Delta\theta$后成向量$\mathbf{g}^{'}$

转动矩阵

设转轴 $\mathbf{P} = \cos\alpha'\mathbf{i}' + \cos\beta'\mathbf{j}' + \cos\gamma'\mathbf{k}'$

令 $\mathbf{g}$ 分别等于于 $\mathbf{i}'$、$\mathbf{j}'$、$\mathbf{k}'$，由式（4-11）可得

$$\begin{cases} \mathbf{i}'' = \mathbf{i}' + \Delta\theta\cos\gamma'\mathbf{j}' - \Delta\theta\cos\beta'\mathbf{k}' \\ \mathbf{j}'' = -\Delta\theta\cos\gamma'\mathbf{i}' + \mathbf{j}' + \Delta\theta\cos\alpha'\mathbf{k}' \\ \mathbf{k}'' = \Delta\theta\cos\beta'\mathbf{i}' - \Delta\theta\cos\alpha'\mathbf{j}' + \mathbf{k}' \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}'' \\ \mathbf{j}'' \\ \mathbf{k}'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta\cos\gamma' & -\Delta\theta\cos\beta' \\ -\Delta\theta\cos\gamma' & 1 & \Delta\theta\cos\alpha' \\ \Delta\theta\cos\beta' & -\Delta\theta\cos\alpha' & 1 \end{bmatrix}}_{R_\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}12)$$

转动矩阵 (4-13)

3、反射棱镜的作用矩阵

物空间坐标系 xyz

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

P

物空间坐标系 $x'y'z'$

$(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$

$$
\begin{cases}
\mathbf{i}' = b_{11}\mathbf{i} + b_{12}\mathbf{j} + b_{13}\mathbf{k} \\
\mathbf{j}' = b_{21}\mathbf{i} + b_{22}\mathbf{j} + b_{23}\mathbf{k} \\
\mathbf{k}' = b_{31}\mathbf{i} + b_{32}\mathbf{j} + b_{33}\mathbf{k}
\end{cases}
$$

反射棱镜的作用矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}14)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}15)$$

基(**i**、**j**、**k**)到基(**i**'、**j**'、**k**')的过渡矩阵

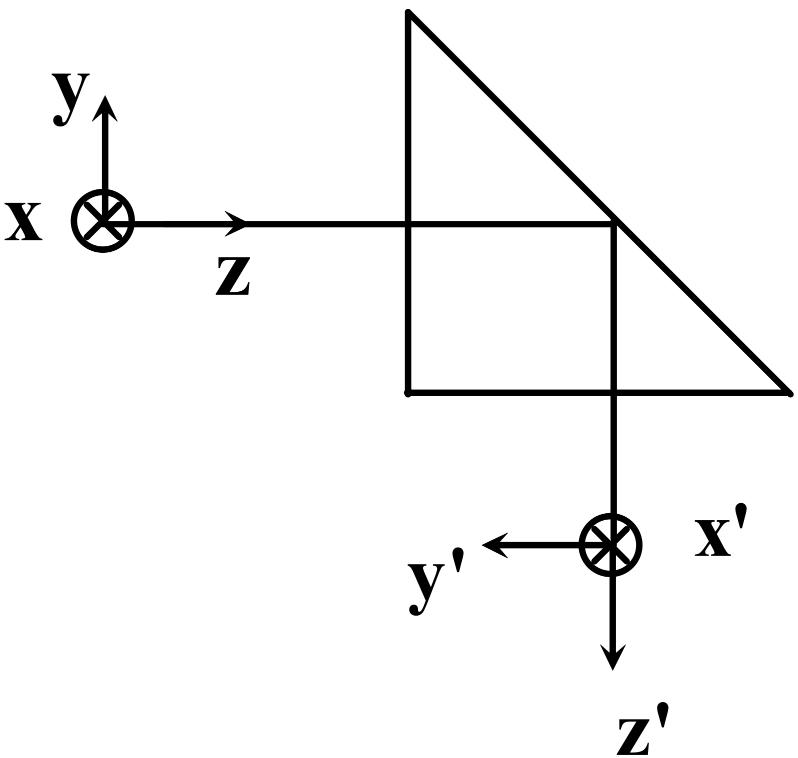
B

反射棱镜的作用矩阵

可逆

反射棱镜的作用矩阵

例： $DI-90^{\circ}$直角棱镜



$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \mathbf{i} \\ \mathbf{j}' = -\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = -\mathbf{j} \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

图4-21 一次反射直角棱镜的成像

反射棱镜的作用矩阵

$$\mathbf{P} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$
$$= \cos\alpha'\mathbf{i}' + \cos\beta'\mathbf{j}' + \cos\gamma'\mathbf{k}'$$

$$(\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix} = (\cos\alpha' \quad \cos\beta' \quad \cos\gamma')\begin{bmatrix}\mathbf{i}'\\ \mathbf{j}'\\ \mathbf{k}'\end{bmatrix}$$

将式（4-14）代入

$$(\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix} = (\cos\alpha' \quad \cos\beta' \quad \cos\gamma')\ B\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma) = (\cos\alpha' \quad \cos\beta' \quad \cos\gamma')\ B$$

反射棱镜的作用矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{bmatrix} = (B^T)^{-1} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

B是正交矩阵：$B^T = B^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}16)$$

4、光轴偏与像倾斜的计算公式

像空间坐标系方位变化情况的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}''' \\ \mathbf{j}''' \\ \mathbf{k}''' \end{bmatrix} = R_{\mathrm{OP}} R_{\mathrm{OP}'} \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} \tag{4-17}$$

其中

$$R_{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta\cos\gamma' & -\Delta\theta\cos\beta' \\ -\Delta\theta\cos\gamma' & 1 & \Delta\theta\cos\alpha' \\ \Delta\theta\cos\beta' & -\Delta\theta\cos\alpha' & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\mathrm{oP}'} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\gamma & (-1)^{N}\Delta\theta\cos\beta \\ (-1)^{N}\Delta\theta\cos\gamma & 1 & (-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\alpha \\ (-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\beta & (-1)^{N}\Delta\theta\cos\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

光轴偏与像倾斜的计算公式

$$R_{o\mathbf{P}}R_{o\mathbf{P}'}=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & (-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\gamma+\Delta\theta\cos\gamma' & (-1)^{N}\Delta\theta\cos\beta-\Delta\theta\cos\beta' \\ (-1)^{N}\Delta\theta\cos\gamma-\Delta\theta\cos\gamma' & 1 & (-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\alpha+\Delta\theta\cos\alpha' \\ (-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\beta+\Delta\theta\cos\beta' & (-1)^{N}\Delta\theta\cos\alpha-\Delta\theta\cos\alpha' & 1 \end{bmatrix}$$

代入式（4-17）即得：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}''' \\ \mathbf{j}''' \\ \mathbf{k}''' \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta[(-1)^{N-1}\cos\gamma+\cos\gamma'] & \Delta\theta[(-1)^{N}\cos\beta-\cos\beta'] \\ \Delta\theta[(-1)^{N}\cos\gamma-\cos\gamma'] & 1 & \Delta\theta[(-1)^{N-1}\cos\alpha+\cos\alpha'] \\ \Delta\theta[(-1)^{N-1}\cos\beta+\cos\beta'] & \Delta\theta[(-1)^{N}\cos\alpha-\cos\alpha'] & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix}$$

光轴偏与像倾斜的计算公式

光轴偏: $(\mathbf{k}''' - \mathbf{k}')$

$$\Delta\mathbf{k}' = [(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\beta + \Delta\theta\cos\beta']\mathbf{i}' + [(-1)^{N}\Delta\theta\cos\alpha - \Delta\theta\cos\alpha']\mathbf{j}'$$

(4-18)

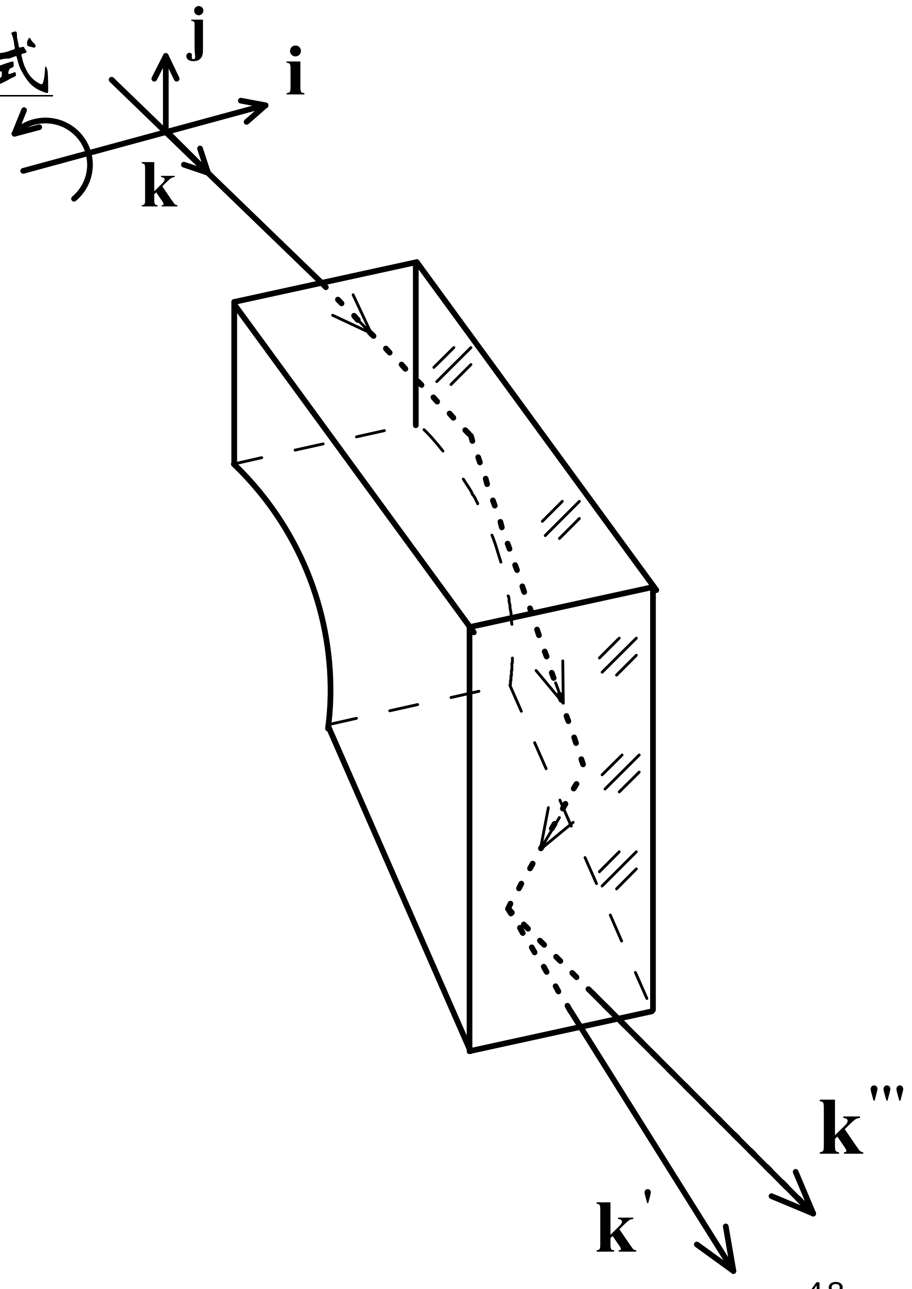
像倾斜: $\mathbf{j}'''$ 与 $\mathbf{j}'$ 的差在 $\mathbf{i}'$ 方向分量

$$\Delta\mathbf{j}' = [(-1)^{N}\Delta\theta\cos\gamma - \Delta\theta\cos\gamma']\mathbf{i}'$$

(4-19)

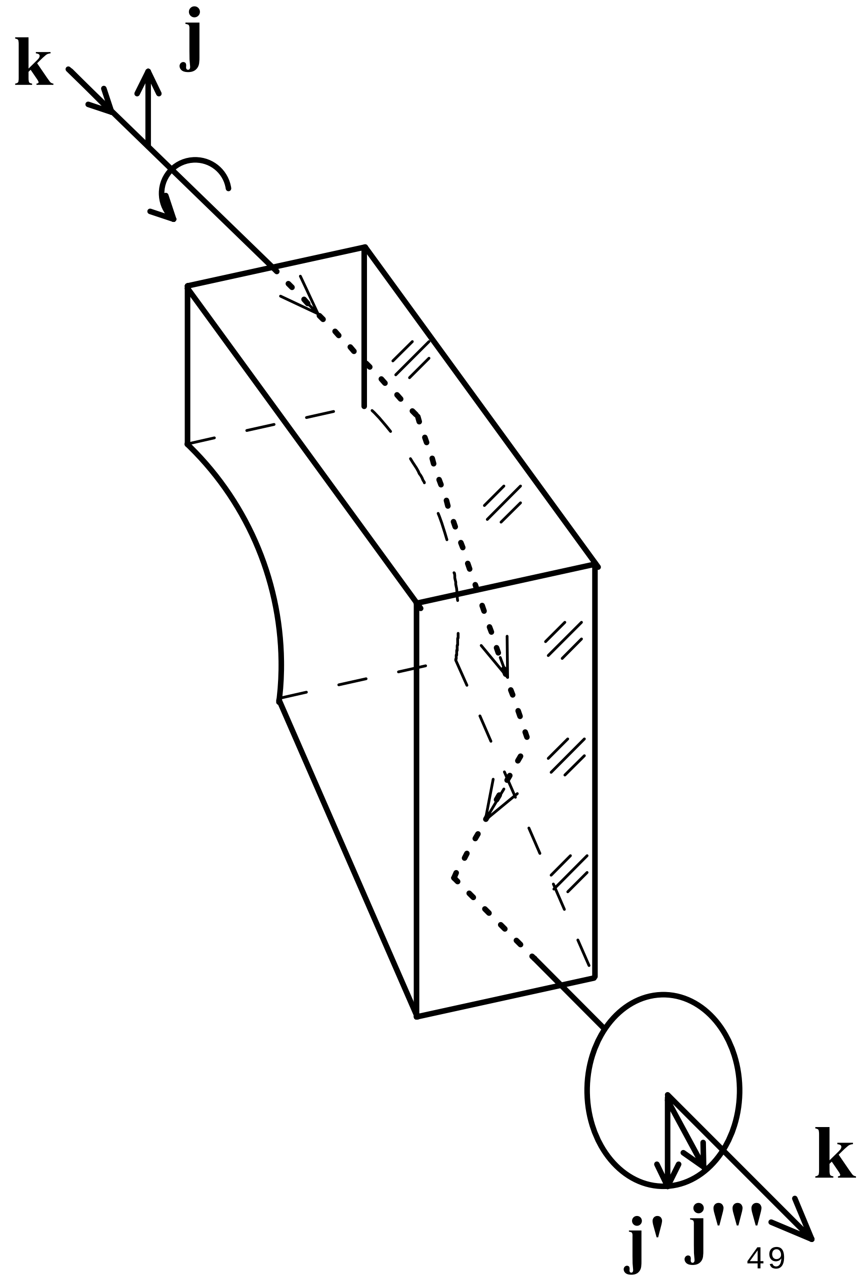
光轴偏与像倾斜的计算公式

图4-22 棱镜转动引起的光轴偏



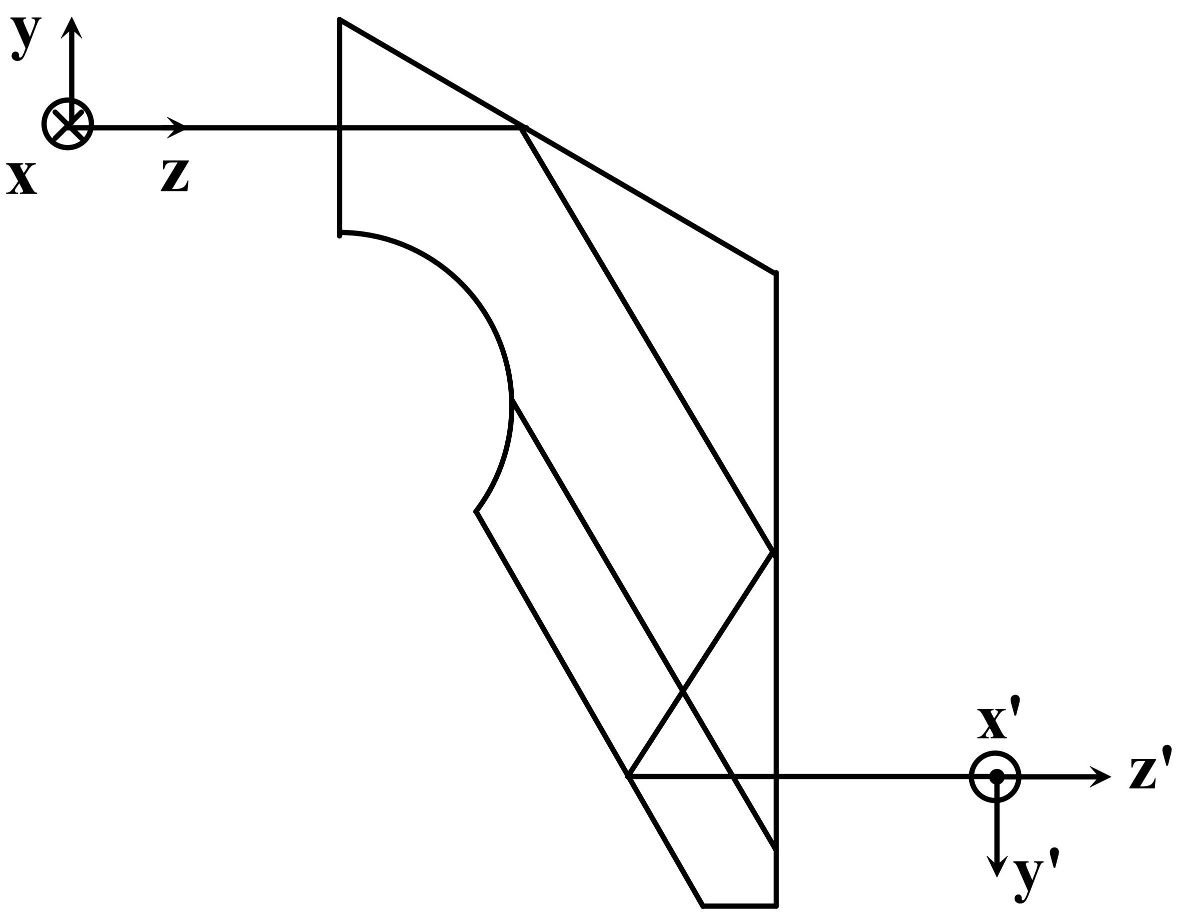
光轴偏与像倾斜的计算公式

图4-23 棱镜转动引起的像倾斜



光轴偏与像倾斜的计算公式

例： $L\ \ \mathrm{III}_J-0^{\circ}$列曼屋脊棱镜



$$\begin{cases} \mathbf{i}'=-\mathbf{i} \\ \mathbf{j}'=-\mathbf{j} \\ \mathbf{k}'=\mathbf{k} \end{cases}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图4-24 列曼屋脊棱镜成像

例

光轴偏与像倾斜的计算公式

$$\mathbf{P} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

由式（4-16）

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

有

$$\begin{cases} \cos\alpha' = -\cos\alpha \\ \cos\beta' = -\cos\beta \\ \cos\gamma' = \cos\gamma \end{cases}$$

光轴偏 $\Delta\mathbf{k}' = -2\Delta\theta\cos\beta\mathbf{i}' + 2\Delta\theta\cos\alpha\mathbf{j}'$

像倾斜 $\Delta\mathbf{j}' = 0$

5、特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

(1) 特征方向

若有一根轴或几根轴，棱镜绕其微量转动既不产生光轴偏也不产生像倾斜，这$\mathbf{P}^*$根轴所表示的方向定义为棱镜的特征方向。

$$\Delta\mathbf{k}' = [(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\beta + \Delta\theta\cos\beta']\mathbf{i}' + [(-1)^{N}\Delta\theta\cos\alpha - \Delta\theta\cos\alpha']\mathbf{j}' = 0$$

$$\Delta\mathbf{j}' = [(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\gamma + \Delta\theta\cos\gamma']\mathbf{i}' = 0$$

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

亦即要求

$$\begin{cases}(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\alpha+\Delta\theta\cos\alpha^{'}=0\\(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\beta+\Delta\theta\cos\beta^{'}=0\\(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\gamma+\Delta\theta\cos\gamma^{'}=0\end{cases}$$

用矩阵表达

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha^{'}\\\cos\beta^{'}\\\cos\gamma^{'}\end{bmatrix}=(-1)^{N}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\cos\beta\\\cos\gamma\end{bmatrix}\qquad(4\text{-}20)$$

将（4-16）式代入

$$B\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\cos\beta\\\cos\gamma\end{bmatrix}=(-1)^{N}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\cos\beta\\\cos\gamma\end{bmatrix}\qquad(4\text{-}21)$$

求特征方向 $\mathbf{P}^*$ 就是求特征值为 $(-1)^N$ 的矩阵 B 的特征向量！

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

B 是否有特征值 $(-1)^N$？

棱镜反射面总数为 N

$$B = B_N \cdot B_{N-1} \cdots\cdots B_I \cdots\cdots B_1$$

$$|B_i| = -1$$

$$|B| = \prod_{i=1}^{N} |B_i|$$

$$= (-1)^N$$

特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - B| = 0$ 的三个复数解 λ_1、λ_2、λ_3

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |B|$$

如果 λ 是 B 的特征值

$$BX_0 = \lambda X_0 \quad \Rightarrow \quad B^{-1} X_0 = \frac{1}{\lambda} X_0$$

$$\Rightarrow \quad B^T X_0 = \frac{1}{\lambda} X_0 \quad \Rightarrow$$

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

$\frac{1}{\lambda}$是矩阵B^T的特征值

$$\left|\frac{1}{\lambda}\mathrm{I} - B^T\right| = 0$$

又

$$0 = \left|\frac{1}{\lambda}\mathrm{I} - B^T\right|$$
$$= \left|(\frac{1}{\lambda}\mathrm{I} - B)^T\right|$$
$$= \left|\frac{1}{\lambda}\mathrm{I} - B\right|$$

⇒ $\frac{1}{\lambda}$也是矩阵B^T的特征值

令 $\lambda_1 = \lambda$　$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$　由 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |B|$

$$\lambda_3 = |B|$$

⇒ $$= (-1)^N$$

B至少有一个特征值$(-1)^N$

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}') \begin{bmatrix} \cos\alpha' \\ \cos\beta' \\ \cos\gamma' \end{bmatrix}$$

$$= (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}) \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

将式(4-20)代入

$$(-1)^N (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}') \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}) \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}') \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = (-1)^N (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}) \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

对于偶次反射棱镜来说，特征方向在像空间坐标系中的三个方向余弦与它在物空间坐标系中的三个方向余弦对应相等，则像空间坐标系一定可由物空间坐标系以此特征方向为轴转动某一角度 ϕ 而得到

对于奇次反射棱镜来说，特征方向在像空间坐标系中的三个方向余弦与它在反向物空间坐标系中的三个方向余弦对应相等，则像空间坐标系一定可由反向物空间坐标系以此特征方向为轴转动某一角度 ϕ 而得出

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

求解 $\mathbf{P}^*$

$$\begin{cases}(b_{11}+(-1)^{N-1})\cos\alpha+b_{12}\cos\beta+b_{13}\cos\gamma=0\\ b_{21}\cos\alpha+(b_{22}+(-1)^{N-1})\cos\beta+b_{23}\cos\gamma=0\\ b_{31}\cos\alpha+b_{32}\cos\beta+(b_{33}+(-1)^{N-1})\cos\gamma=0\end{cases} \qquad \text{(4-22)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{cases} \qquad \mathbf{P}^*$$

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

例： $K\ \ \mathrm{II}-80^\circ-90^\circ$空间棱镜

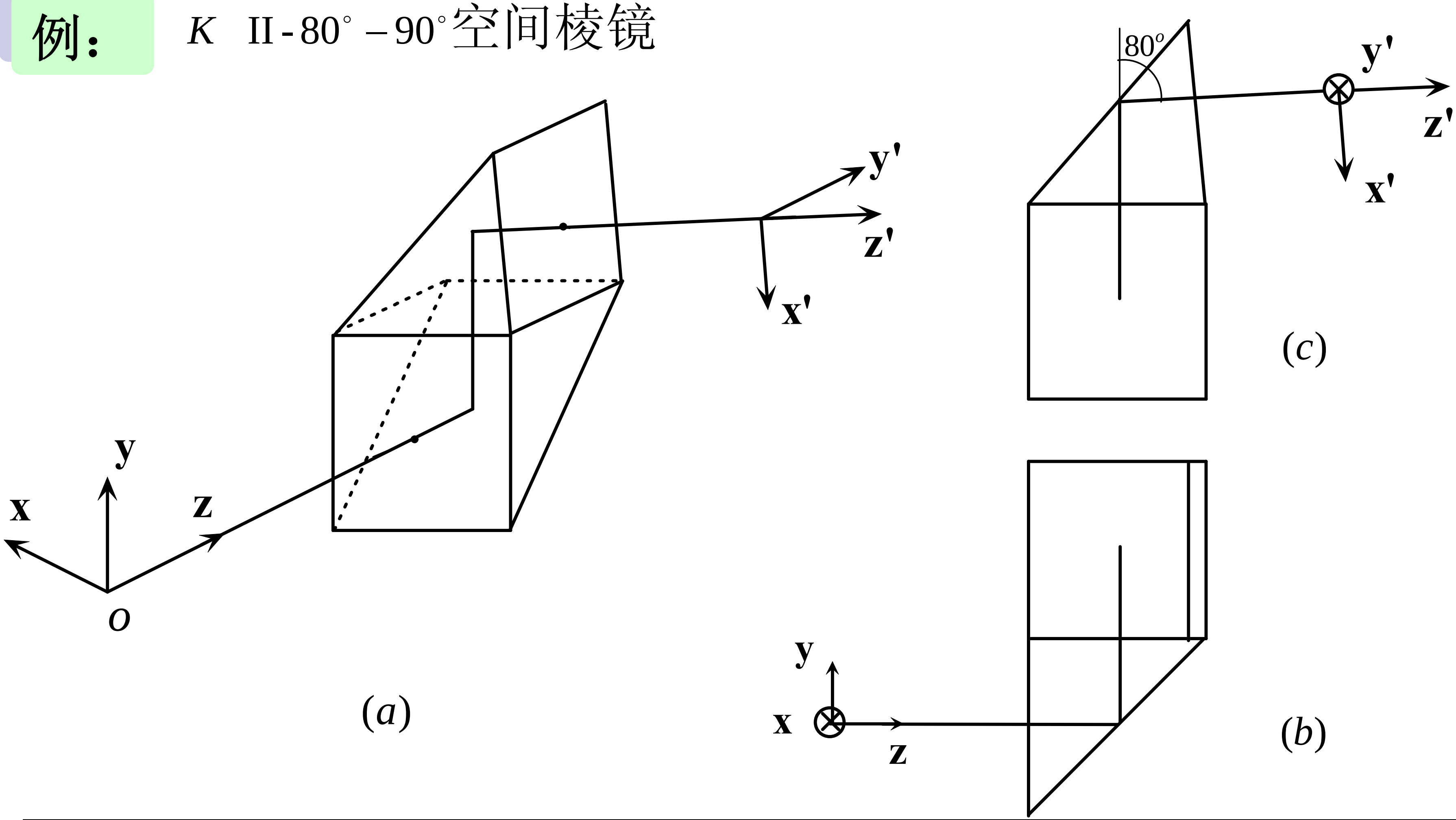


图4-25 $KII-80^\circ-90$空间棱镜。(a)轴测图，(b)顺 X方向投影图 (c)顺 z 方向投影图。

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

例

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos 100^\circ \mathbf{i} - \cos 10^\circ \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = -\cos 10^\circ \mathbf{i} + \cos 80^\circ \mathbf{j} \end{cases}$$

作用矩阵 $B = \begin{bmatrix} \cos 100^\circ & -\cos 10^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos 10^\circ & \cos 80^\circ & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -0.1736 & -0.9848 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.9848 & 0.1736 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos 120.68^\circ \\ \cos\beta = \cos 52.54^\circ \\ \cos\gamma = \cos 52.54^\circ \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \cos\alpha = \cos 59.32^\circ \\ \cos\beta = \cos 127.45^\circ \\ \cos\gamma = \cos 127.45^\circ \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{P}^* = \cos 59.32^\circ \mathbf{i} + \cos 127.45^\circ \mathbf{j} + \cos 127.45^\circ \mathbf{k}}$$

(2) 特征平面

棱镜绕轴微量转动不产生像倾斜，这些转轴均在同一个平面内。定义这个平面为棱镜的特征平面

由式（4-19），像倾斜为零

$$(-1)^{N-1}\Delta\theta\cos\gamma+\Delta\theta\cos\gamma'=0 \qquad (4\text{-}23)$$

由式（4-16）

$$\cos\gamma'=b_{31}\cos\alpha+b_{32}\cos\beta+b_{33}\cos\gamma$$

$$b_{31}\cos\alpha+b_{32}\cos\beta+(b_{33}+(-1)^{N})\cos\gamma=0 \qquad (4\text{-}24)$$

特征平面方程

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

例： $K\ \mathrm{II}\text{-}80^\circ-90^\circ$ 空间棱镜

将 $b_{31}=-0.9848$ ，$b_{32}=0.1736$ ，$b_{33}=0$ 、 N＝2代入式（4-24）得：

$$-0.9848\cos\alpha+0.1736\cos\beta+\cos\gamma=0$$

平面法矢量

$$\mathbf{n}=-0.9848\mathbf{i}+0.1736\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

(3)最大像倾斜方向

棱镜绕P_M轴微转一角度而产生的像倾斜最大。定义P_M轴所表示的方向为最大像倾斜方向

$$\left|\Delta \mathbf{j}'\right| = \Delta\theta[b_{31}\cos\alpha + b_{32}\cos\beta + (b_{33} + (-1)^{N-1})\cos\gamma]$$

AT $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

条件极值

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

拉格朗日乘子法

令

$$F=|\Delta \mathbf{j}'|+\lambda\Delta\theta(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial(\cos\alpha)}=b_{31}+2\lambda\cos\alpha=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial(\cos\beta)}=b_{32}+2\lambda\cos\beta=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial(\cos\gamma)}=b_{33}+(-1)^{N-1}+2\lambda\cos\gamma=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=0\end{cases} \qquad (4\text{-}25)$$

$\Rightarrow$ $\cos\alpha$ $\quad$ $\cos\beta$ $\quad$ $\cos\gamma$

特征方向、特征平面和最大像倾斜方向

例： $K \quad \mathrm{II}\text{-}80^\circ-90^\circ$ 空间棱镜

将 $b_{31}=-0.9848$ ，$b_{32}=0.1736$ ，$b_{33}=0$ 、 N＝2代入式（4-25）得：

$$\cos\alpha=\frac{-0.9848}{\sqrt{0.1736^2+0.9848^2+1}}=\cos 134.14^\circ \qquad \cos\alpha=\frac{0.9848}{\sqrt{0.1736^2+0.9848^2+1}}=\cos 45.86^\circ$$

$$\cos\beta=\frac{0.1736}{\sqrt{0.1736^2+0.9848^2+1}}=\cos 82.95^\circ \quad 和 \quad \cos\beta=\frac{-0.1736}{\sqrt{0.1736^2+0.9848^2+1}}=\cos 97.05^\circ$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{0.1736^2+0.9848^2+1}}=\cos 45^\circ \qquad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{0.1736^2+0.9848^2+1}}=\cos 135^\circ$$

平面法矢量

$$\Delta \mathbf{j}'=\sqrt{2}\Delta\theta\mathbf{i}'$$

4.4
反射棱镜作用矩阵的特征值与特征方向

1、引言

特征方向$\mathbf{P}^*$

&

特征转角φ

2、计算特征转角φ的新公式

反射棱镜作用矩阵

计度

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{33} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}26)$$

迹

$$t_r(B)=\sum_{i=1}^{3} b_{ii} \qquad (4\text{-}27)$$

(1). 偶次反射棱镜φ的计算公式

变换坐标系z轴与特征方向重合

作用矩阵 $$A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}28)$$

计算特征转角φ的新公式

过渡矩阵为C

$$A = CBC^{-1} \qquad (4\text{-}29)$$

$$\begin{aligned} t_r(A) &= t_r(CBC^{-1}) \\ &= t_r(C^{-1}CB) \\ &= t_r(B) \end{aligned} \qquad (4\text{-}30)$$

$$t_r(B) = 2\cos\varphi + 1 \qquad (4\text{-}31)$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} b_{ii} - 1\right)} \qquad (4\text{-}32)$$

计算偶次反射棱镜特征转角φ的新公式

(2). 奇次反射棱镜φ的计算公式

$$A = -\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}33)$$

$$\boxed{\cos\varphi = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} b_{ii} + 1\right)} \qquad (4\text{-}34)$$

计算奇次反射棱镜特征转角φ的新公式

3、复特征值与φ的关系

特征多项式 $f(\lambda)=\left|B-\lambda \mathrm{I}\right|=0$ (4-35)

(1). 偶次反射棱镜

分解式（4-35）

$$(\lambda-1)(a\lambda^2+b\lambda+c)=0 \tag{4-36}$$

式（4-35）、（4-36）展开并作比较

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1-\sum_{i=1}^{3} b_{ii} \\ c=1 \end{cases}$$

复特征值与φ的关系

另外两个特征值必满足方程

$$\lambda^2+(1-\sum_{i=1}^{3}b_{ii})\lambda+1=0 \tag{4-37}$$

将式（4-32）代入

$$\lambda^2-2\cos\varphi\cdot\lambda+1=0 \tag{4-38}$$

解得

$$\boxed{\lambda=e^{\pm i\varphi}} \tag{4-39}$$

偶次反射棱镜作用矩阵的复特征值之幅角即为特征转角φ

复特征值与φ的关系

(2). 奇次反射棱镜

$$(\lambda+1)(a\lambda^2+b\lambda+c)=0 \qquad (4\text{-}40)$$

类似得

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1-\sum_{i=1}^{3} b_{ii} \\ c=1 \end{cases}$$

另外两个特征值必满足方程

$$\lambda^2-(1+\sum_{i=1}^{3} b_{ii})\lambda+1=0 \qquad (4\text{-}41)$$

$$\lambda^2+2\cos\varphi\cdot\lambda+1=0 \qquad (4\text{-}42)$$

解得

$$\boxed{\lambda=e^{\pm i(\pi-\varphi)}} \qquad (4\text{-}43)$$

4、反射棱镜的简化（等效）

(1). 偶次反射棱镜

由式（4-39），$\varphi=\pi$时 $\lambda=-1$ (4-44)

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-45}$$

属于$\lambda=-1$的两个线性无关的特征向量为

$$\begin{cases} \vec{\xi}_1=\hat{e}_1 \\ \vec{\xi}_2=\hat{e}_2 \end{cases} \tag{4-46}$$

属于$\lambda=1$ 的特征向量为$\mathbf{P}^*$

$$\mathbf{P}^*=\hat{e}_3 \tag{4-47}$$

反射棱镜的简化（等效）

$$A\vec{\xi}_1 = -\vec{\xi}_1$$

$$A\vec{\xi}_2 = -\vec{\xi}_2$$

$$A\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^*$$

本征反射镜对

B是对称矩阵

因为 $A = CBC^{-1} \quad C^{-1} = C^T$

$$B = C^T AC$$

取转置

$$B^T = C^T A^T C$$

$$= C^T AC$$

$$= B$$

反射棱镜的简化（等效）

(2). 奇次反射棱镜

由式（4-43），$\varphi=\pi$时 $\quad \lambda=1$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}48)$$

属于$\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\begin{cases}\vec{\xi}_1=\hat{e}_1\\ \vec{\xi}_2=\hat{e}_2\end{cases} \qquad (4\text{-}49)$$

$$A\vec{\xi}_1=-\vec{\xi}_1$$

$$A\vec{\xi}_2=-\vec{\xi}_2$$

$$A\mathbf{P}^*=\mathbf{P}^*$$

属于$\lambda=-1$的特征向量为$\mathbf{P}^*$

$$\mathbf{P}^*=\hat{e}_3 \qquad (4\text{-}50)$$

本征反射镜

4.5
从棱镜成像到棱镜转动定理

两个静态成像的比较可以得到棱镜转动引起的光轴偏与像倾斜的结果，同时还能得出棱镜转动定理。

所以说，棱镜成像是源，而棱镜转动定理是流

4.6
反射棱镜的几何误差

如果棱镜存在几何形状误差，致使展开的玻璃板其两个表面不再相互平行，这将破坏系统的共轴性。这种不平行性，称之为棱镜的“光学平行度”。

它反映了棱镜几何误差的大小。

1、“光学平行度”的分类

“第一光学平行度”
θ_I

展开后主截面内的不平行度
由棱镜主截面内的角度误差产生的

“第二光学平行度”
θ_{II}

A棱差γ_A

棱镜的任一工作面（屋脊面除外）的法线对指定棱的不垂直度

C棱差γ_C

棱镜中屋脊棱对某一指定棱的不垂直度

展开后垂直于主截面方向上的不平行度
由棱镜各个棱的几何位置误差造成的

2、屋脊棱镜的双像差

一个理想的屋脊棱镜，两屋脊面之间的夹角应严格等于90°。如果不等，一束平行光射入棱镜，经过两个屋脊面反射后成为两束有一定夹角的平行光，因而出现双像。这两束平行光之间的夹角，称为屋脊棱镜的双像差，以S表示之。

3、“光学平行度”的计算方法

(1). 反射矩阵

矢量形式的反射定律

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_0-2(\mathbf{a}_0\bullet\mathbf{n})\mathbf{n} \qquad (4\text{-}51)$$

指定直角坐标系中

$$\mathbf{n}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_0=\begin{bmatrix}L_0\\ M_0\\ N_0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}L_1\\ M_1\\ N_1\end{bmatrix}$$

R 反射矩阵 (4-53)

(4-51)式矩阵形式

$$\begin{bmatrix}L_1\\ M_1\\ N_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2\cos^2\alpha & -2\cos\alpha\cos\beta & -2\cos\alpha\cos\gamma\\ -2\cos\alpha\cos\beta & 1-2\cos^2\beta & -2\cos\beta\cos\gamma\\ -2\cos\alpha\cos\gamma & -2\cos\beta\cos\gamma & 1-2\cos^2\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_0\\ M_0\\ N_0\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}52)$$

“光学平行度”的计算方法

(2). 误差矩阵

反射面处于理想位置时
$$\mathbf{n}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}54)$$

反射面稍稍偏离理想位置后
$$\mathbf{n}_{\Delta}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+d\alpha)\\ \cos(\beta+d\beta)\\ \cos(\gamma+d\gamma)\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}55)$$

反射矩阵

$$\mathbf{R}_{\Delta}=\begin{bmatrix}1-2\cos^2(\alpha+d\alpha) & -2\cos(\alpha+d\alpha)\cos(\beta+d\beta) & -2\cos(\alpha+d\alpha)\cos(\gamma+d\gamma)\\ -2\cos(\alpha+d\alpha)\cos(\beta+d\beta) & 1-2\cos^2(\beta+d\beta) & -2\cos(\beta+d\beta)\cos(\gamma+d\gamma)\\ -2\cos(\alpha+d\alpha)\cos(\gamma+d\gamma) & -2\cos(\beta+d\beta)\cos(\gamma+d\gamma) & 1-2\cos^2(\gamma+d\gamma)\end{bmatrix}$$

(4-56)

“光学平行度”的计算方法

取一阶近似

$$\mathbf{R}_{\Delta} = \mathbf{R} + \Delta\mathbf{R} \qquad (4\text{-}57)$$

其中

$$\Delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2\sin 2\alpha d\alpha & \begin{matrix} 2\sin\alpha\cos\beta d\alpha \\ +2\cos\alpha\sin\beta d\beta \end{matrix} & \begin{matrix} 2\sin\alpha\cos\gamma d\alpha \\ +2\cos\alpha\sin\gamma d\gamma \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2\sin\alpha\cos\beta d\alpha \\ +2\cos\alpha\sin\beta d\beta \end{matrix} & 2\sin 2\beta d\beta & \begin{matrix} 2\sin\beta\cos\gamma d\beta \\ +2\cos\beta\sin\gamma d\gamma \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2\sin\alpha\cos\gamma d\alpha \\ +2\cos\alpha\sin\gamma d\gamma \end{matrix} & \begin{matrix} 2\sin\beta\cos\gamma d\beta \\ +2\cos\beta\sin\gamma d\gamma \end{matrix} & 2\sin 2\gamma d\gamma \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}58)$$

误差矩阵

(3).矢量积的矩阵表示

两个矢量

$$\mathbf{a}_1 = L_1\mathbf{i} + M_1\mathbf{j} + N_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_2 = L_2\mathbf{i} + M_2\mathbf{j} + N_2\mathbf{k}$$

矢量积

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}59)$$

(4).光学平行度的计算方法

有 i个反射面

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i-1} \bullet\bullet\bullet \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{a}_0 \qquad (4\text{-}60)$$

若所有反射面都有制造误差

$$\mathbf{a}_{\Delta i} = (\mathbf{R}_i + \Delta\mathbf{R}_i)(\mathbf{R}_{i-1} + \Delta\mathbf{R}_{i-1})$$

略去二阶和高于二阶的微量

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\Delta i} &= \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i-1} \cdots \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{a}_0 \\ &\quad + (\Delta\mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i-1} \cdots \mathbf{R}_1 \mathbf{a}_0 + \cdots + \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i-1} \cdots \mathbf{R}_2 \Delta\mathbf{R}_1 \mathbf{a}_0) \qquad (4\text{-}61)\end{aligned}$$

误差之代数和简记为$\Delta\mathbf{a}_i$

$$\mathbf{a}_{\Delta i} = \mathbf{a}_i + \Delta\mathbf{a}_i \qquad (4\text{-}62)$$

“光学平行度”的计算方法

选棱镜的入射面为计算时的基准面，对于没有制造误差的棱镜出射光线必定沿出射面的法线方向出射：

$$\mathbf{a}_i \times \mathbf{m} = 0 \tag{4-63}$$

如果棱镜的反射面和出射面都有位置误差

$$\mathbf{a}_{\Delta i} \times \mathbf{m}_{\Delta} \neq 0 \tag{4-64}$$

设

$$\mathbf{m} = \cos\phi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} + \cos\eta\mathbf{k}$$

有误差时

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\Delta} &= \cos(\phi + d\phi)\mathbf{i} + \cos(\varphi + d\varphi)\mathbf{j} + \cos(\eta + d\eta)\mathbf{k} \\ &= (\cos\phi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} + \cos\eta\mathbf{k}) + (-\sin\phi d\phi\mathbf{i} - \sin\varphi d\varphi\mathbf{j} - \sin\eta d\eta\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{m} + \Delta\mathbf{m} \end{aligned} \tag{4-65}$$

“光学平行度”的计算方法

光学平行度

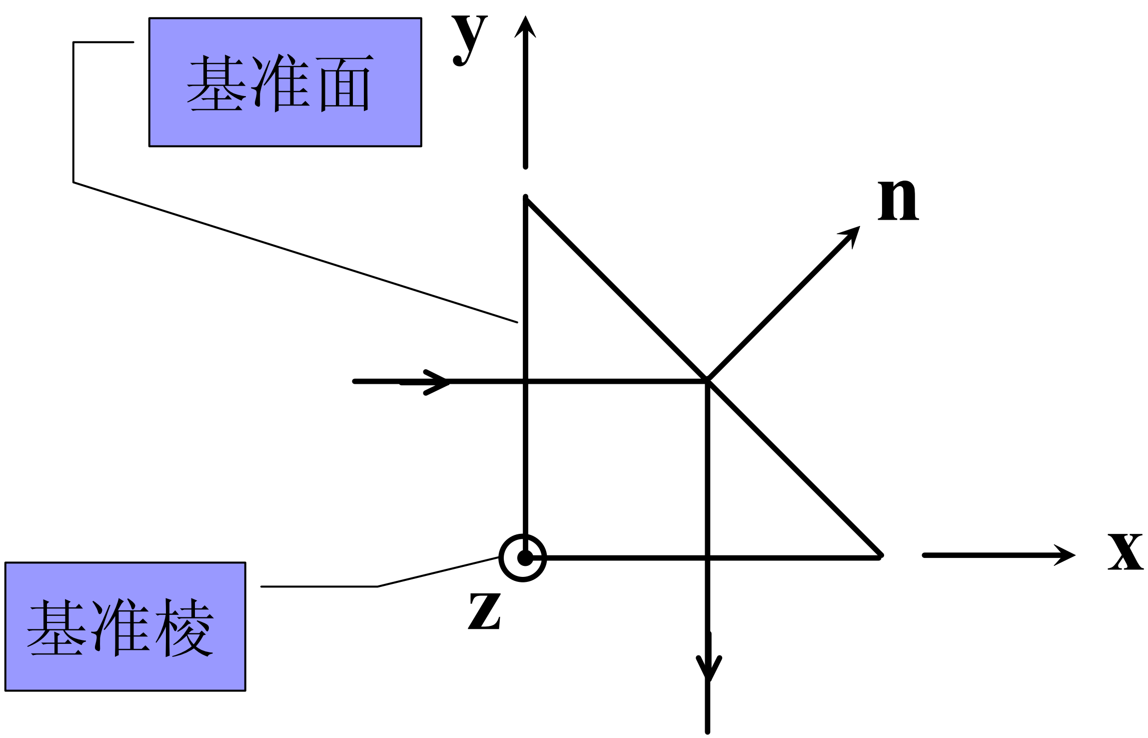
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{a}_{\Delta i} \times \mathbf{m}_{\Delta} \\
&= (\mathbf{a}_i + \Delta\mathbf{a}_i) \times (\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}) \\
&= \mathbf{a}_i \times \mathbf{m} + \Delta\mathbf{a}_i \times \mathbf{m} + \mathbf{a}_i \times \Delta\mathbf{m} + \Delta\mathbf{a}_i \times \Delta\mathbf{m} \\
&= \mathbf{m} \times (\Delta\mathbf{m} - \Delta\mathbf{a}_i)
\end{aligned}
\qquad \text{(4-66)}
$$

矩阵形式

$$
\boldsymbol{\theta} = \mathbf{m}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} (\Delta\mathbf{m} - \Delta\mathbf{a}_i) \qquad \text{(4-67)}
$$

“光学平行度”的计算方法

例1： 一次反射直角棱镜的光学平行度



$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \\ \cos 45^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ \\ \cos 180^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ \\ \cos 90^\circ \\ \cos 90_\circ \end{bmatrix}$$

图4-26 一次反射直角棱镜的光学平行度计算

“光学平行度”的计算方法

例1：

$$\Delta\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\sin 90^\circ d\phi \\ -\sin 180^\circ d\varphi \\ -\sin 90^\circ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d\phi \\ 0 \\ -d\eta \end{bmatrix}$$

因为出射面的法线只能在 xy 平面内变动，所以 $d\eta = 0$

$$\Delta\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -d\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

据式(4-58)

$$\Delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2d\alpha & d\alpha + d\beta & \sqrt{2}d\gamma \\ d\alpha + d\beta & 2d\beta & \sqrt{2}d\gamma \\ \sqrt{2}d\gamma & \sqrt{2}d\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

“光学平行度”的计算方法

例1：

据式(4-61)

$$\Delta\mathbf{a}_1 = \Delta\mathbf{R}\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 2d\alpha \\ d\alpha + d\beta \\ \sqrt{2}d\gamma \end{bmatrix}$$

再据式(4-67)

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{m}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} (\Delta\mathbf{m} - \Delta\mathbf{a}_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d\phi - 2d\alpha \\ -d\alpha - d\beta \\ -\sqrt{2}d\gamma \end{bmatrix}$$

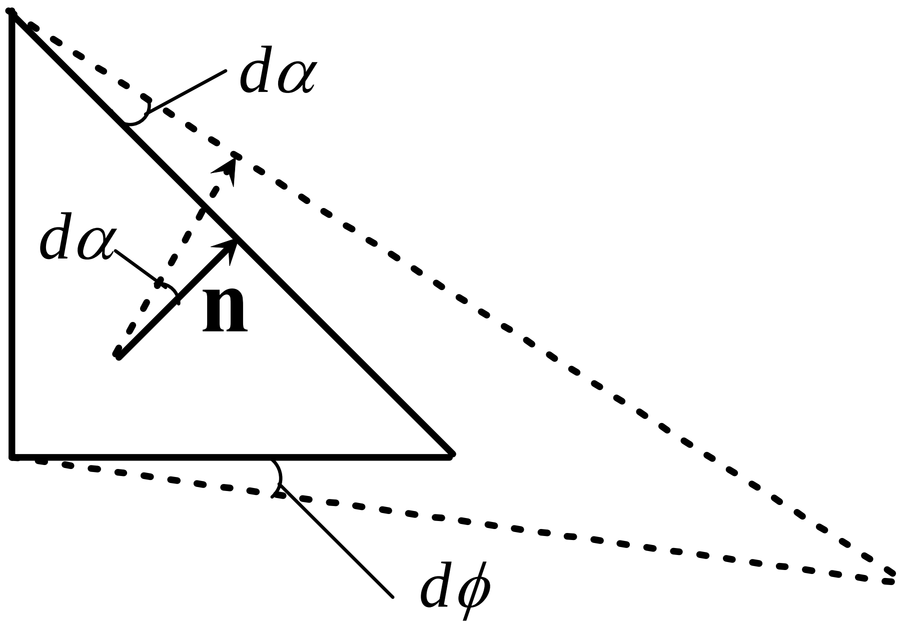
$$= \sqrt{2}d\gamma\mathbf{i} + (-d\phi - 2d\alpha)\mathbf{k}$$

θ_{II}

θ_I

“光学平行度”的计算方法

例1：



$$\delta 45^\circ = (45^\circ - d\phi - d\alpha) - (45^\circ + d\alpha)$$
$$= -d\phi - 2d\alpha$$

所以第一光学平行度
和第二光学平行度

$$\theta_I = \delta 45^\circ$$

$$\theta_{II} = \sqrt{2}d\gamma$$
$$= \sqrt{2}\gamma_A$$

图4-27第一光学平行度 θ_I 与主截面内角度误差的关系

“光学平行度”的计算方法

例2： 半五角棱镜的光学平行度

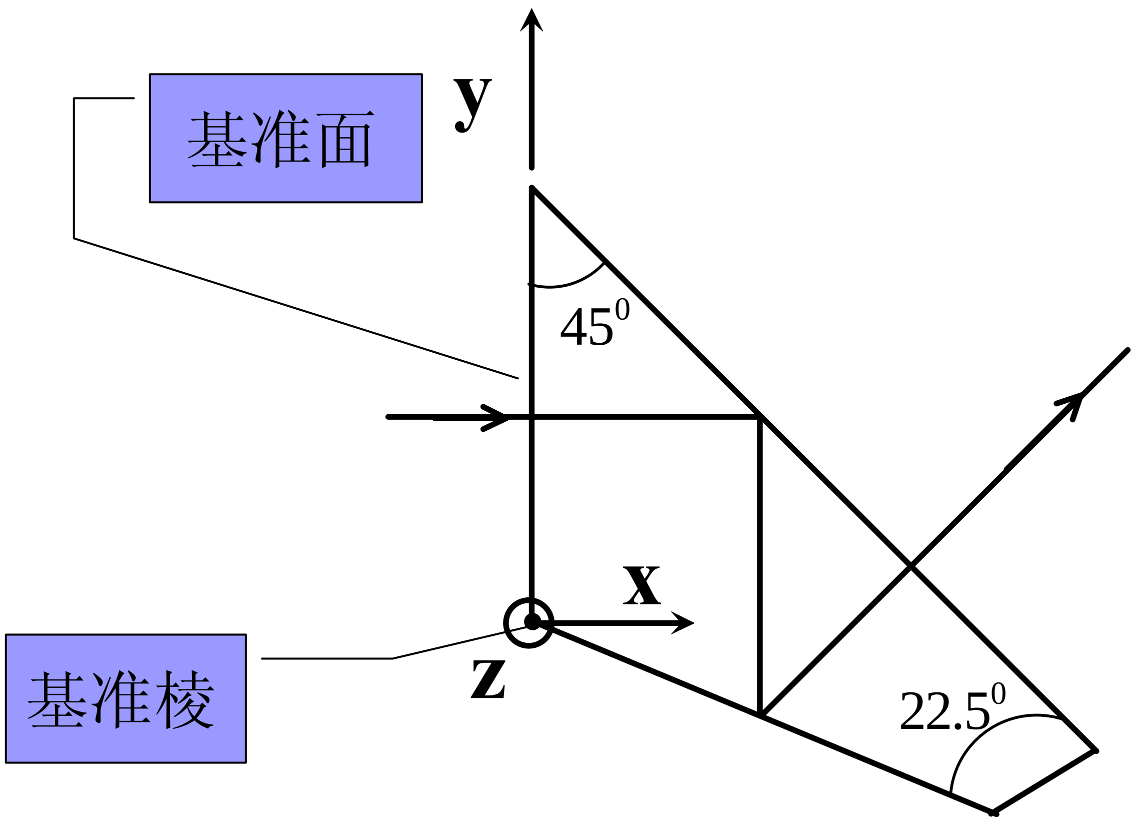


图4-28 半五角棱镜

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \\ \cos 45^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \mathbf{m}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \cos 112.5^\circ \\ \cos 157.5^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ \\ \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

“光学平行度”的计算方法

例2：

$$\Delta\mathbf{m}=\begin{bmatrix}-\sin 45^\circ d\alpha_1\\-\sin 45^\circ d\beta_1\\-\sin 90^\circ d\gamma_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}d\alpha_1\\-\dfrac{\sqrt{2}}{2}d\beta_1\\-d\gamma_1\end{bmatrix}$$

由式(4-53)

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}&-\dfrac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\dfrac{\sqrt{2}}{2}&-\dfrac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由式(4-58)

$$\Delta\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}2d\alpha_1&d\alpha_1+d\beta_1&\sqrt{2}d\gamma_1\\d\alpha_1+d\beta_1&2d\beta_1&\sqrt{2}d\gamma_1\\\sqrt{2}d\gamma_1&\sqrt{2}d\gamma_1&0\end{bmatrix}$$

“光学平行度”的计算方法

例2：

将$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$两端同时微分

$$-2\cos\alpha_1\sin\alpha_1 d\alpha_1-2\cos\beta_1\sin\beta_1 d\beta_1-2\cos\gamma_1\sin\gamma_1 d\gamma_1=0$$

将$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$之值代入得

$$d\alpha_1=-d\beta_1$$

则

$$\Delta\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix} 2d\alpha_1 & 0 & \sqrt{2}d\gamma_1 \\ 0 & -2d\alpha_1 & \sqrt{2}d\gamma_1 \\ \sqrt{2}d\gamma_1 & \sqrt{2}d\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

同样

$$\Delta\mathbf{R}_2=\begin{bmatrix} -\sqrt{2}d\alpha_2 & -\sqrt{2}d\alpha_2 & 0 \\ -\sqrt{2}d\alpha_2 & \sqrt{2}d\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

“光学平行度”的计算方法

例2：

据式(4-61)和式(4-62)

$$\Delta\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}_2\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{a}_0$$

$$= \sqrt{2}\begin{bmatrix} d\alpha_1 + d\alpha_2 \\ -d\alpha_1 - d\alpha_2 \\ d\gamma_1 \end{bmatrix}$$

又由式(4-67)得

$$\boldsymbol{\theta} = (3d\alpha_1 + 2d\alpha_2)\mathbf{k} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}d\gamma_1(\mathbf{j}-\mathbf{i})$$

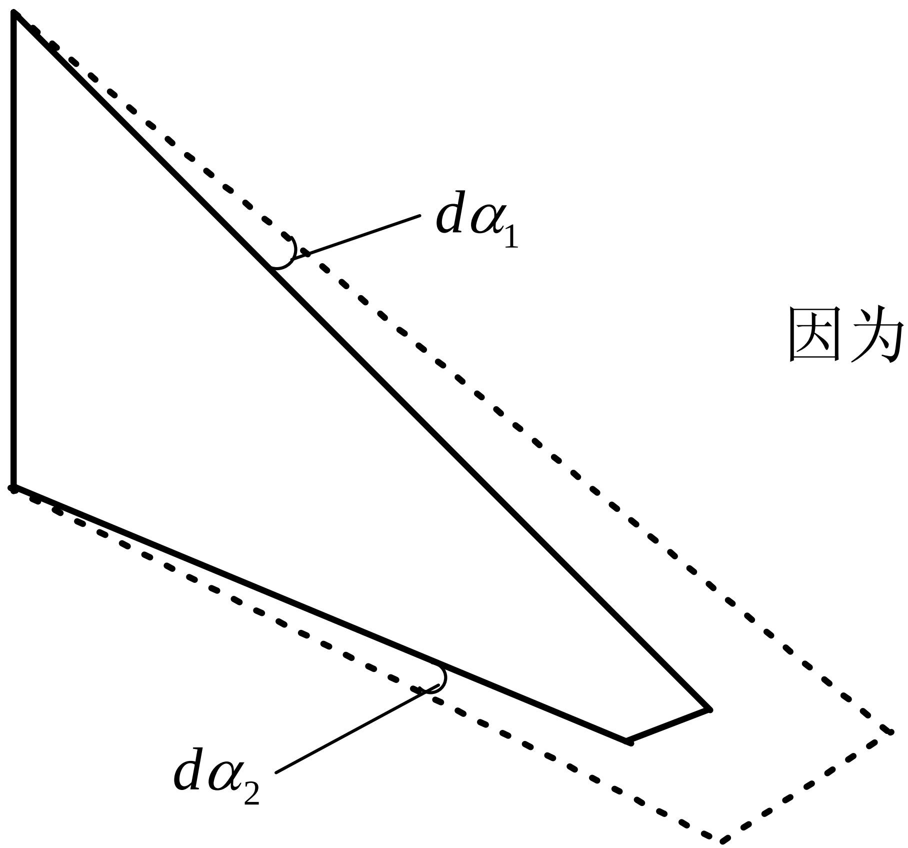
$$\theta_I = 3d\alpha_1 + 2d\alpha_2$$

$$\theta_{II} = (1+\sqrt{2})d\gamma_1$$

$$= (1+\sqrt{2})\gamma_A$$

“光学平行度”的计算方法

例2：



$$\theta_I = 3d\alpha_1 + 2d\alpha_2$$

$$= 3\Delta 45^\circ + 2\Delta 112.5^\circ$$

因为三角形的内角和为180°，所以

$$\Delta 45^\circ + \Delta 112.5^\circ + \Delta 22.5^\circ = 0$$

故

$$\theta_1 = \Delta 45^\circ - 2\Delta 22.5^\circ$$

图4-29 第一平行度与主截面内角度误差的关系

“光学平行度”的计算方法

例3： 斯密特屋脊棱镜的光学平行度

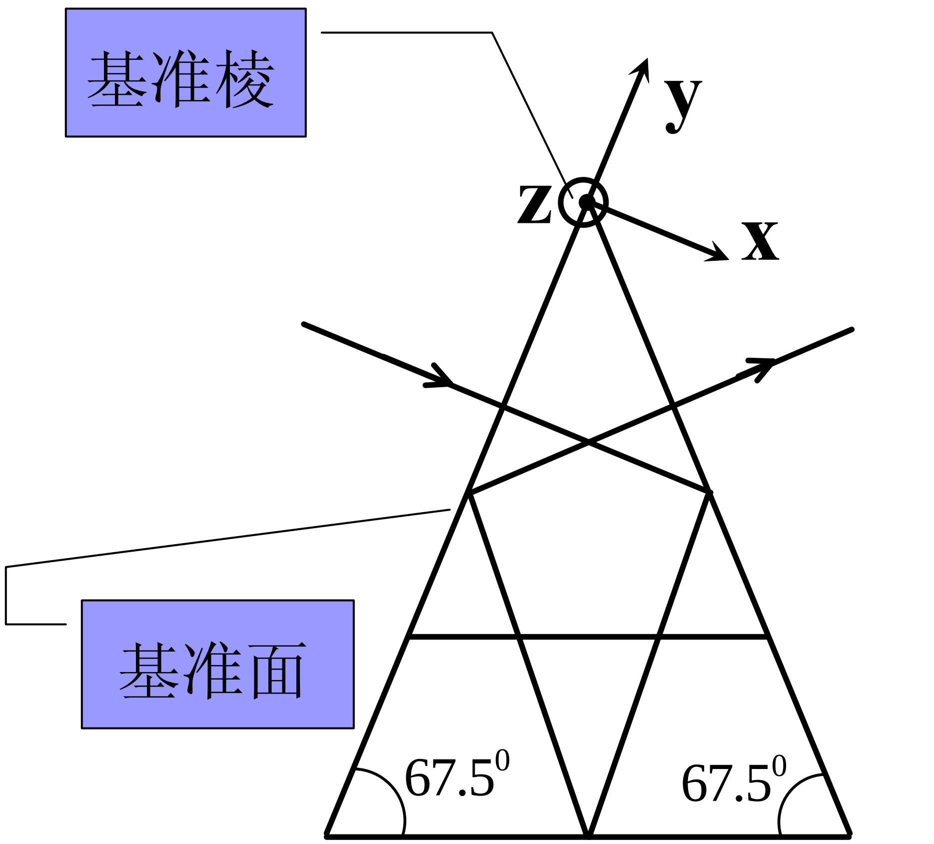


图4-30 斯密特屋脊棱镜

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \\ \cos 45^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \mathbf{m}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \cos 157.5^\circ \\ \cos 112.5^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ \\ \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ \\ \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

"光学平行度"的计算方法

例3:

$$\Delta \mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} d\alpha_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} d\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

据式(4-53)有

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

“光学平行度”的计算方法

例3:

由式(4-58)得

$$\Delta\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}2d\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & -2d\alpha_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \Delta\mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}d\alpha_2 & \sqrt{2}d\alpha_2 & 2\cos 157.5^\circ d\gamma_2\\ \sqrt{2}d\alpha_2 & \sqrt{2}d\alpha_2 & 2\cos 112.5^\circ d\gamma_2\\ 2\cos 157.5^\circ d\gamma_2 & 2\cos 112.5^\circ d\gamma_2 & 0\end{bmatrix}$$

由式(4-61)和式(4-60)有

$$\Delta\mathbf{a}_3=\mathbf{R}_3(-\mathbf{R}_2)\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{a}_0+\mathbf{R}_3(-\Delta\mathbf{R}_2)\mathbf{R}_1\mathbf{a}_0=\sqrt{2}\begin{bmatrix}-d\alpha_1-d\alpha_2\\ d\alpha_1+d\alpha_2\\ \sqrt{2}\cos 112.5^\circ d\gamma_2\end{bmatrix}$$

又由式(4-67)得

$$\boldsymbol{\theta}=(-d\alpha_1-2d\alpha_2)\mathbf{k}-\sqrt{2}\cos 112.5^\circ\ d\gamma_2(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

$$\theta_I=d\alpha_1+d\alpha_2=\delta 67.5^\circ$$

$$\theta_{II}=0.76\gamma_c$$

4、屋脊棱镜的双像差计算式

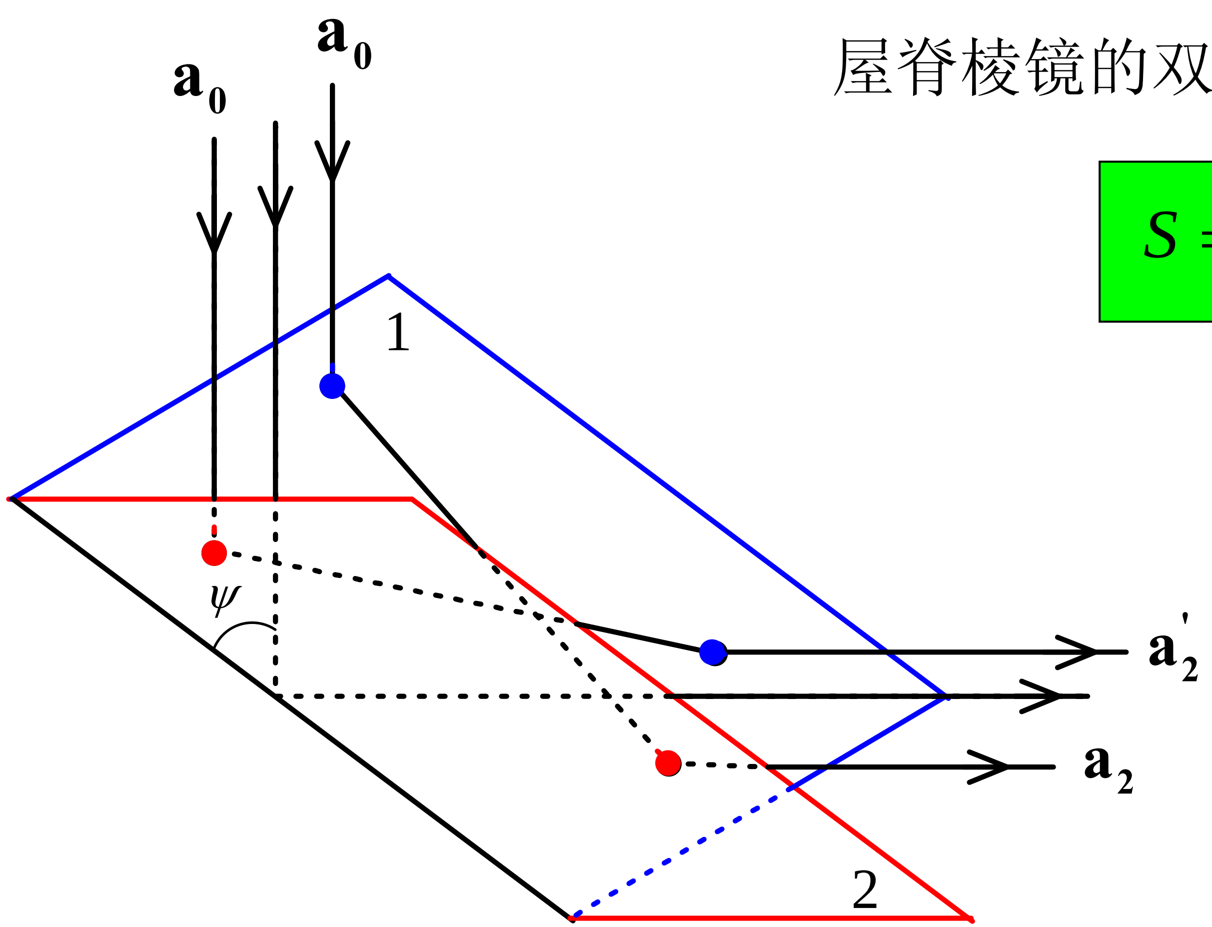


图4-31 角镜

屋脊棱镜的双像差计算式：

$$S = 4n\delta \sin\psi$$

(4-68)

屋脊棱镜的双像差计算式

光线$\mathbf{a}_0$ $\longrightarrow$ 反射镜1 $\longrightarrow$ 反射镜2 $\longrightarrow$ 射出$\mathbf{a}_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 - 2(\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{n}_2)\mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{a}_0 - 2(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 - 2\{\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_2 - 2(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2\}\mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{a}_0 - 2(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 - 2(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_2)\mathbf{n}_2 + 4(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_1)(\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2)\mathbf{n}_2 \qquad (4\text{-}69)\end{aligned}$$

光线$\mathbf{a}_0$ $\longrightarrow$ 反射镜2 $\longrightarrow$ 反射镜1 $\longrightarrow$ 射出$\mathbf{a}_2'$

$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_0 - 2(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_2)\mathbf{n}_2 - 2(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 + 4(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_2)(\mathbf{n}_2 \bullet \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 \qquad (4\text{-}70)$$

两出射光线方向之差为

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2' &= 4(\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2)\{(\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_1)\mathbf{n}_2 - (\mathbf{a}_0 \bullet \mathbf{n}_2)\mathbf{n}_1\} \\ &= 4(\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2)\{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{a}_0 \qquad (4\text{-}71)\end{aligned}$$

屋脊棱镜的双像差计算式

如果两反射镜的夹角为90°，则有

$$\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2' = 0$$

如果两反射镜的夹角为$90^\circ \pm \delta$，则

$$\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = \cos(90 \pm \delta)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}\sin(90^\circ \pm \delta)$$

由式(4-71)可得

$$\left|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2'\right| = 4\cos(90^\circ \pm \delta)\sin(90^\circ \pm \delta)\sin\psi$$

$$= 2\sin(180^\circ \pm 2\delta)\sin\psi$$

屋脊棱镜的双像差计算式

设分别由两个反射镜上出射的出射光线 $\mathbf{a}_2$和 $\mathbf{a}'_2$之间的夹角为S

则 $$\left|\mathbf{a}_2-\mathbf{a}'_2\right|=2\sin(\frac{1}{2}S)$$

故有

$$\sin(\frac{1}{2}S)=\sin(180^\circ\pm2\delta)\sin\psi$$

因为S 和 δ都很小，所以

$$S=4\delta\sin\psi \qquad (4\text{-}72)$$

如果角镜间充以折射率为 n的媒质，即反射棱镜屋脊的情况

(4-72)=> $$\boxed{S=4n\delta\sin\psi} \qquad (4\text{-}73)$$